



# Influence de la houle sur la stabilité d'un massif sous-marin

Luc Dormieux

## ► To cite this version:

Luc Dormieux. Influence de la houle sur la stabilité d'un massif sous-marin. Hydrologie. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1989. Français. NNT : . tel-00529413

**HAL Id: tel-00529413**

**<https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-00529413>**

Submitted on 26 Nov 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

78361

NS 15189

(3)

THÈSE DE DOCTORAT

présentée à

l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

par Luc Dormieux

sujet de la thèse :

INFLUENCE DE LA HOULE SUR  
LA STABILITÉ D'UN MASSIF SOUS-MARIN

soutenue le 9/11/1989

devant le jury composé de :

MM. J. Salençon

Président

J.-L. Auriault

P. de Buhan

Rapporteurs

O. Coussy

A. Pecker

F. Schlosser

Examineurs





## REMERCIEMENTS

C'est à Jean Salençon et Patrick de Buhan que je souhaite en premier lieu exprimer ma reconnaissance. Ils ont tous deux profondément marqué ma vie d'étudiant. C'est pourquoi j'attache un grand prix à leur présence dans le jury qui examine ce mémoire de thèse.

Jean Salençon m'a fait l'honneur de le présider. Les travaux que je présente aujourd'hui prennent leur source dans l'enseignement qu'il donne à l'ENPC et que j'ai suivi avec enthousiasme. Il est bien évident qu'ils ont largement bénéficié des recherches qu'il a lui-même développées.

Dès l'origine, la conception du métier d'enseignant-chercheur dont Patrick de Buhan témoigne par son activité quotidienne m'a profondément impressionné et a emporté mon adhésion. Qu'il soit remercié pour ce témoignage plein de vérité qui a guidé mes choix professionnels.

A l'occasion de discussions qui m'ont passionné, Jean-Louis Auriault, Professeur à l'Université de Grenoble, a su ouvrir à mes yeux des perspectives nouvelles pour les travaux exposés dans ce mémoire. Je lui adresse un profond remerciement.

Mes remerciements vont ensuite à François Schlosser, Directeur du CERMES, qui m'a initié à la Mécanique des Sols et m'a accueilli dans son laboratoire. Je remercie aussi Alain Pecker qui a porté sur ce mémoire le regard d'un spécialiste de la Dynamique des Sols et l'a enrichi de judicieuses observations.

Qu'il me soit maintenant permis d'exprimer ici tout ce que cette thèse



doit à Olivier Coussy car j'ai puisé abondamment dans sa générosité et sa créativité et j'ai bénéficié de l'enthousiasme qu'il manifeste pour le métier qu'il exerce. Pour cela et pour la joie profonde que me procure le fait de travailler avec lui, je lui adresse un remerciement chaleureux.

Cette thèse a pris corps à l'ENPC au milieu de chercheurs parmi lesquels je compte bon nombre d'amis. Je leur suis reconnaissant pour l'ambiance fraternelle qu'ils ont su créer dans cette Ecole.

Je souhaite enfin remercier Mlle Dominique Barrière et Mme Josette Fayol pour l'aide qu'elles m'ont apportée dans la réalisation pratique de ce document.

## SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE..... p.3

CHAPITRE I - QUELQUES NOTIONS SUR LES MODELISATIONS DE LA HOULE... p.7

- 1 - THÉORIE LINÉAIRE DE LA HOULE
- 2 - EXTENSION DE LA THEORIE LINÉAIRE
- 3 - CONCLUSION

CHAPITRE II - LE PROBLEME ELASTIQUE..... p.21

- 1 - INTRODUCTION
- 2 - LE CAS MONOPHASIQUE
- 3 - LE CAS BIPHASIQUE
- 4 - CONCLUSION
- 5 - ANNEXES

CHAPITRE III - STABILITE D'UN MASSIF DE SOL COHERENT..... p.91

- 1 - PROBLEME POSÉ ET CADRE D'ÉTUDE
- 2 - LE CRITÈRE LINÉAIRE ISOTROPE
- 3 - LE CRITÈRE LINÉAIRE ANISOTROPE
- 4 - LE CRITÈRE HOMOGÈNE
- 5 - CONCLUSION
- 6 - ANNEXES

CHAPITRE IV - STABILITE D'UN MASSIF DE SOL GRANULAIRE.....	p.195
--	-------

- 1 - INTRODUCTION
- 2 - ELEMENTS SUR LE COMPORTEMENT DES SABLES SOUS  
SOLLICITATION CYCLIQUE
- 3 - CALCUL DE STABILITÉ EN CONTRAINTES EFFECTIVES :  
DEFINITION ET OBSTACLE
- 4 - LA METHODE DÉCOUPLÉE DE SEED
- 5 - QUELQUES CONSIDÉRATIONS SUR LA MÉTHODE  
DÉCOUPLÉE
- 6 - REFORMULATION DE LA MÉTHODE DÉCOUPLÉE
- 7 - CALCUL DE STABILITÉ EN CONTRAINTES EFFECTIVES
- 8 - CONCLUSION
- 9 - ANNEXES

CONCLUSION GENERALE.....	p.280
--------------------------	-------

BIBLIOGRAPHIE.....	p.282
--------------------	-------

## INTRODUCTION GENERALE

Il y a encore une vingtaine d'années, le titre de ce mémoire aurait comporté un point d'interrogation. En effet, ce n'est qu'en 1970 que Henkel présenta la première analyse quantitative établissant que la houle était en mesure de provoquer des phénomènes d'instabilité dans les fonds sous-marins. Sa démarche consista à étudier a posteriori des glissements ayant été décelés dans les zones deltaïques du Mississippi et à démontrer qu'ils ne pouvaient être attribués à la seule action des forces de gravité. Son travail fut suivi par d'autres contributions importantes à l'étude de la stabilité des fonds sous-marins.

Cette prise de conscience relativement tardive des effets néfastes de la houle est naturellement en lien étroit avec la multiplication des plateformes offshore et la densification du réseau des cables et pipelines sous-marins. Suite au développement de ces techniques, la liste des dommages subis par de telles réalisations n'a pas manqué de s'allonger. L'analyse des accidents survenus permet de classer qualitativement les risques auxquels elles sont exposées du fait de l'instabilité du massif dont elles sont solidaires. Pour un massif à surface inclinée, le glissement constitue la forme la plus spectaculaire de l'instabilité. Elle peut entraîner la destruction de toute installation en liaison avec le fond sous-marin mis en mouvement. Lorsque la face supérieure du massif est horizontale, une structure fondée sur des pieux à profondeur suffisante n'est pas concernée par les mouvements superficiels du sol de fondation. C'est le cas de bon nombre de plateformes. En revanche, les cables et pipelines qui sont en général ancrés au fond sous-marin ou enterrés à faible profondeur demeurent exposés à l'action néfaste de la houle.

Ainsi, préalablement à toute construction sur un site sous-marin, il convient de s'interroger sur la stabilité de ce dernier sous l'action

combinée des pressions exercées par le fluide en mouvement et des forces de gravité. C'est à cette question que le présent travail a tenté de répondre.

Dans la plupart des problèmes de stabilité classique du Génie Civil, la sollicitation extérieure est une donnée. En revanche, l'évaluation des pressions qu'exerce la mer sur le fond marin requiert une modélisation. Avant d'aborder la question de la stabilité proprement dite, une étude de l'agent extérieur s'impose. C'est l'objet du chapitre préliminaire, de nature bibliographique.

Le second chapitre est consacré à l'étude de la réponse d'un massif sous-marin supposé élastique à un champ de pressions agissant sur sa face supérieure. L'hypothèse d'élasticité est appliquée successivement au comportement du sol en faisant abstraction de sa composition biphasique, puis à celui de squelette. Le mot-clé de la question posée étant celui de stabilité, un tel point de départ peut paraître paradoxal. Il trouvera sa justification comme outil des développements à venir. Mais pour lui-même, ce chapitre présente déjà l'avantage de fournir des expressions analytiques pour les champs de contraintes et de déplacements. Elles sont le noyau autour duquel une première intuition de la réponse du massif peut se constituer.

Toutefois, il est clair que cette modélisation élastique ne saurait prétendre à beaucoup de réalisme pour un matériau comme le sol. En tout état de cause, elle est impropre à fournir *par elle-même* des indications sur la stabilité. Plutôt que d'affiner la modélisation du comportement puis de chercher à résoudre un problème aux limites, deux considérations majeures imposent le Calcul à la Rupture comme l'outil naturel pour la résolution du problème posé.

La première consiste simplement à observer que les informations sur le matériau doivent être recherchées au fond de l'océan. La mise en oeuvre des techniques usuelles de la reconnaissance des sols s'en trouve considérablement compliquée. Si l'on peut espérer accéder à un

critère de rupture, la recherche d'une caractérisation plus complète du comportement paraît beaucoup plus ambitieuse. En d'autres termes, la question de la stabilité sera le plus souvent la seule à laquelle il soit possible de répondre, ou plus exactement, qu'il soit possible de se poser.

Mais en fait, dans la plupart des cas, c'est bien la question qui préoccupe l'ingénieur. En effet, si dans certains ouvrages du domaine de la Géotechnique les déplacements revêtent une importance capitale, la connaissance des mouvements du fond marin n'a pas d'intérêt sous réserve que l'on soit assuré qu'ils restent dans des limites compatibles avec le projet considéré. C'est la deuxième justification de la préférence accordée au Calcul à la Rupture.

Comme les terres émergées, les sols sous-marins sont constitués de sols fins normalement ou surconsolidés et de sols granulaires. Chacune de ces deux grandes classes de matériaux a fait l'objet d'une analyse spécifique.

Le chapitre III est consacré à l'étude de la stabilité des massifs constitués de sols fins. La durée typique d'une tempête est suffisamment courte pour que la question puisse être traitée avec l'hypothèse de réponse non drainée. On caractérise alors classiquement le domaine des contraintes admissibles par un critère de Tresca. On examine diverses hypothèses sur l'hétérogénéité et l'anisotropie de la cohésion du matériau constitutif.

Le chapitre IV traite du cas où le massif est constitué d'un matériau granulaire. Le critère de rupture porte alors sur le tenseur des contraintes effectives. Vis-à-vis de ce type de contraintes, le chargement dû la houle intervient sous la forme des forces d'écoulement qui matérialisent le couplage entre le fluide interstitiel et le squelette. Celles-ci sont tributaires du comportement de ce dernier et leur détermination nécessite des informations non contenues dans le critère de rupture. Le problème de

stabilité sort donc du cadre classique. C'est l'occasion d'une réflexion sur l'emploi du Calcul à la Rupture en contraintes effectives.

## CHAPITRE I : QUELQUES NOTIONS SUR LES MODELISATIONS DE LA HOULE

### INTRODUCTION

La surface de la mer peut en général être décrite comme une succession indéfinie d'ondulations de forme voisine, que l'on appelle houle. Elle trouve son origine dans le frottement de l'air en mouvement au-dessus de la mer avec la surface de celle-ci. C'est donc le vent qui contrôle l'amplitude du phénomène mesurée par la hauteur des vagues. Celle-ci dépend de la durée au cours de laquelle il souffle, de l'étendue sur laquelle il agit et de sa vitesse.

Le fluide mis en mouvement au-dessus du fond sous-marin exerce sur ce dernier une pression différente de la pression hydrostatique qui s'applique lorsqu'il est au repos. Le calcul de la différence c'est-à-dire évidemment la surpression due à la houle, constitue un point de passage obligé vers l'analyse de la stabilité.

Depuis plus d'un siècle, diverses théories mathématiques ont été élaborées pour modéliser la houle. Elles donnent chacune dans leur domaine de validité une évaluation de la pression recherchée. On se propose de détailler l'étude de la théorie dite linéaire dont il est fait grand usage dans la pratique du génie maritime et qui sera au centre des calculs de stabilité à suivre. Pour un aperçu plus général des théories de la houle, on pourra se reporter à Bonnefille (1980), P. et C. Aristaghes (1985) ou au "Shore protection manual" (1984).

### 1 - THÉORIE LINÉAIRE DE LA HOULE

On considère l'écoulement à surface libre du fluide supposé parfait et incompressible sur un fond marin plan, horizontal et imperméable d'équation  $y=-d$  (voir figure 1). L'idée de départ de la théorie linéaire consiste à rechercher une solution irrotationnelle, sous la forme d'une onde plane se propageant parallèlement à l'axe Ox,



indépendante de la coordonnée  $z$ , périodique par rapport au temps  $t$  (période  $T$ ), et à chaque instant périodique par rapport à l'abscisse  $x$  (période  $L$ ). On établit tout d'abord les équations à vérifier par l'écoulement irrotationnel.

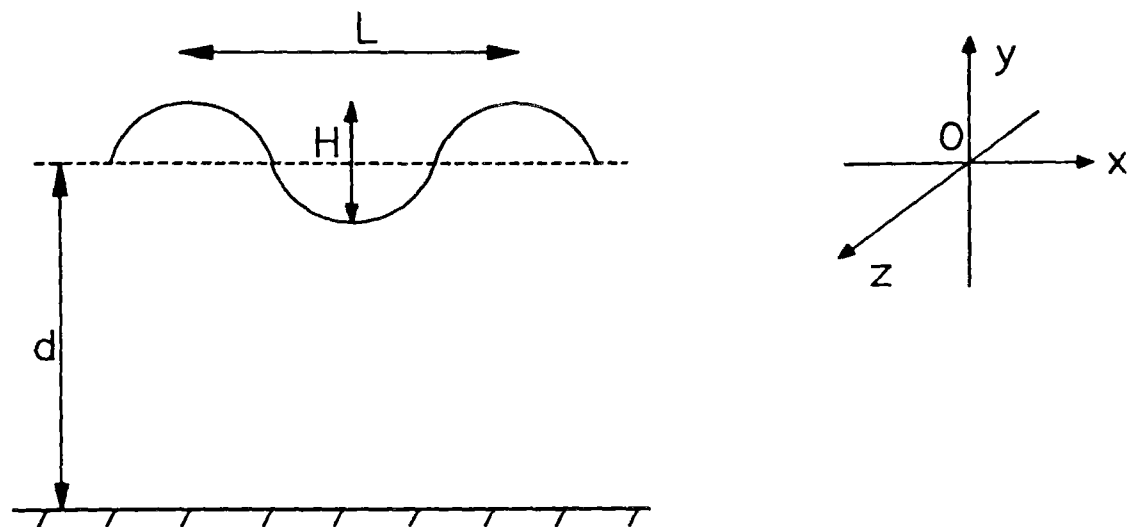


figure 1 : schéma de principe

### 1. Equations de l'écoulement irrotationnel

Soit  $\underline{U}$  le champ eulérien des vitesses dans le fluide et  $\varphi$  un potentiel dont dérive  $\underline{U}$  :

$$\underline{U} = \text{grad } \varphi \quad (1)$$

L'équation de continuité pour le fluide incompressible indique que ce potentiel est harmonique :

$$\Delta \varphi = 0 \quad (2)$$

Le fluide de masse volumique  $\rho$  est soumis à la densité volumique de forces de pesanteur  $-\rho g \underline{j}$ . L'expression de la conservation de la quantité de mouvement fournit l'équation d'Euler :

$$\rho \left[ \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \frac{1}{2} \underline{\text{grad}}(\underline{U}^2) + \underline{\text{rot}} \underline{U} \wedge \underline{U} \right] + \underline{\text{grad}} P = -\rho g \underline{1} \quad (3)$$

où P désigne la pression du fluide. On définit alors la charge hydraulique h par :

$$h = y + \frac{1}{g} \left( \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} \underline{U}^2 \right) \quad (4)$$

L'emploi de (1) dans (3) conduit au théorème de Bernoulli :

$$\underline{\text{grad}} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + gh \right] = \underline{0} \quad (5)$$

Aux équations de champ (2) et (5), il convient d'ajouter maintenant les conditions aux limites. L'imperméabilité du substratum se traduit par le fait que la vitesse des particules y est tangentielle au plan  $y=-d$  :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, -d, t) = 0 \quad (6)$$

Il reste à écrire les conditions concernant la surface libre. On note  $y=\eta(x,t)$  l'écart de celle-ci par rapport à la position au repos, d'équation  $y=0$ . On pose tout d'abord une condition de type cinématique, exprimant que les particules situées sur la surface libre à un instant donné y demeurent. Autrement dit, il n'y a pas d'enfoncement de la couche superficielle à l'intérieur du domaine liquide. Il vient :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{pour } y = \eta(x, t) \quad (7)$$

La fonction  $\eta(x,t)$  étant une inconnue, le jeu des équations (2), (6) et (7) est encore insuffisant pour déterminer la fonction  $\varphi$ . Une condition supplémentaire est fournie par le fait que la pression du fluide sur la surface libre coïncide avec la pression atmosphérique  $p_{\text{atm}}$ . En utilisant (5), on voit qu'il existe une fonction du temps  $C(t)$  pour laquelle :

$$C(t) = \frac{1}{\rho} p_{\text{atm}} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, \eta(x, t), t) + \frac{1}{2} \underline{U}^2(x, \eta(x, t), t) + g\eta(x, t) \quad (8)$$

En négligeant les variations éventuelles de la pression atmosphérique

sur la zone et la durée de l'étude, et en observant que (1) ne détermine le potentiel des vitesses qu'à une fonction du temps près, on choisit une détermination  $\varphi$  de celui-ci pour laquelle :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, \eta(x, t), t) + \frac{1}{2}(\text{grad } \varphi)^2(x, \eta(x, t), t) + g\eta(x, t) = 0 \quad (9)$$

Les équations (2), (6), (7) et (9) déterminent alors le potentiel recherché. (1) fournit l'accès aux vitesses et (5) permet le calcul du champ des pressions  $P(x, y, t)$  dans le fluide.

## 2. Linéarisation

L'idée spécifique de la théorie linéaire consiste, comme son nom l'annonce, à linéariser les conditions aux limites sur la surface libre. Pour déceler les termes prédominants dans (7) et (9), on introduit classiquement les variables adimensionnelles  $x'$ ,  $y'$ ,  $\eta'$  et  $t'$  définies à partir de  $x$ ,  $y$ ,  $\eta$  et  $t$  par :

$$\begin{aligned} x &= Hx' \\ y &= Hy' \\ \eta &= H\eta' \\ t &= Tt' \end{aligned} \quad (10)$$

En observant expérimentalement que les trajectoires des particules au voisinage de la surface libre sont approximativement des cercles dont le diamètre est voisin de  $H$ , on pose :

$$\underline{U} = \frac{H}{T} \underline{U}' \quad (11)$$

De manière cohérente avec (11), on définit le potentiel réduit  $\varphi'$  par :

$$\varphi = \frac{HL}{T} \varphi' \quad (12)$$

Avec ces notations, (7) et (9) prennent la forme suivante :

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial y'} = \gamma \frac{\partial \eta'}{\partial t'} + \gamma^2 \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} \cdot \frac{\partial \eta'}{\partial x'} \quad (13a)$$

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t'} + \frac{1}{2} \gamma (U_x'^2 + U_y'^2) + \frac{gT^2}{L} \eta' = 0 \quad (13b)$$

où intervient la cambrure  $\gamma=H/L$ . L'exploitation de ces nouvelles variables repose sur l'hypothèse que les dérivées ne faisant intervenir que des variables adimensionnelles sont de l'ordre de l'unité. Si l'on impose alors à la houle de vérifier la condition de faible cambrure ( $\gamma \ll 1$ ), on est amené à négliger les termes en  $\gamma^2$  dans (13a) et en  $\gamma$  dans (13b). En revenant aux variables dimensionnées, il vient :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, \eta(x, t), t) \approx \frac{\partial \eta}{\partial t}(x, t) \quad (14a)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, \eta(x, t), t) \approx -g\eta(x, t) \quad (14b)$$

Il reste que ces équations sont écrites sur la surface libre. Pour éliminer cette difficulté, on assujettit la houle à vérifier de plus la condition de faible amplitude ( $\frac{H}{d} \ll 1$ ). On suppose alors que les équations (14) sont encore valables à la cote  $y=0$ . Il est alors possible d'éliminer  $\eta$  entre (14a) et (14b). On aboutit finalement au système suivant :

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{pour } -d \leq y \leq 0 \quad (15a)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{pour } y = 0 \quad (15b)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{pour } y = -d \quad (15c)$$

dont on va maintenant construire une solution.

### 3. Construction de la solution

Puisque l'on cherche une onde progressive doublement périodique par rapport à  $x$  et  $t$ , il est naturel d'introduire la variable :

$$\alpha = x - \frac{L}{T}t \quad (16)$$

et de rechercher une fonction  $\varphi$  solution de (15) dans laquelle  $x$  et  $t$  interviennent par le biais de  $\alpha$ , sans "couplage" avec  $y$  :

$$\varphi(x, y, t) = A(\alpha) B(y) \quad (17)$$

L'équation (15a) et les propriétés de périodicité demandées imposent alors la forme de A(.) et B(.) :

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= A_1 \sin(k\alpha + A_2) \\ B(y) &= B_1 \operatorname{ch}(ky + B_2) \end{aligned} \quad (18)$$

où  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  et  $B_2$  sont des constantes à déterminer et  $k=2\pi/L$ . A un changement d'origine de l'axe des  $x$  près, il est possible de fixer  $A_2=0$ . Par ailleurs, (15c) impose que  $B_2=kd$  :

$$B(y) = B_1 \operatorname{ch} k(y + d) \quad (19)$$

Il existe donc une constante  $C$  telle que :

$$\varphi(x, y, t) = C \sin k(x - \frac{L}{T}t) \operatorname{ch} k(y + d) \quad (20)$$

En utilisant (20) et (14b), on obtient :

$$\eta(x, t) = \frac{2\pi C}{gT} \operatorname{ch}(kd) \cos k(x - \frac{L}{T}t) \quad (21)$$

Sous cette forme, le coefficient  $\frac{2\pi C}{gT} \operatorname{ch}(kd)$  apparaît comme la distance entre une crête et le niveau de l'eau au repos. C'est donc la moitié de la hauteur  $H$  des vagues. La constante  $C$  de (20) peut alors être exprimée en fonction des paramètres physiques de la houle :

$$C = \frac{gHT}{4\pi \operatorname{ch}(kd)} \quad (22)$$

Il vient :

$$\varphi(x, y, t) = \frac{gHT}{4\pi \operatorname{ch}(kd)} \sin k(x - \frac{L}{T}t) \operatorname{ch} k(y + d) \quad (23a)$$

$$\eta(x, t) = \frac{2\pi C}{gT} \operatorname{ch}(kd) \cos k(x - \frac{L}{T}t) \quad (23b)$$

Il reste à écrire la condition (15b) sur la surface libre. Elle fournit une relation entre la longueur d'onde  $L$ , la période  $T$  et la profondeur d'eau  $d$  :

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \operatorname{th}(2\pi \frac{d}{L}) \quad (24)$$

La célérité  $\frac{L}{T}$  des ondes aussi construites est une fonction de la période, d'où le nom de relation de dispersion souvent donnée à (24).

Il convient d'insister sur le fait que la construction de la solution qui vient d'être présentée s'appuie en amont sur la condition cinématique de surface libre (7), selon laquelle il n'y a pas d'enfoncement de la couche superficielle dans la masse du fluide. Cette condition n'est plus pertinente lorsque se produit le phénomène de déferlement qui apparaît lorsque la vitesse horizontale des particules de la crête des vagues dépasse la célérité de l'onde. Les travaux de Miche (1944), bien confirmés par les observations expérimentales, ont mis en évidence l'existence d'une valeur critique  $\gamma_{cr}$  de la cambrure pour laquelle la vague déferle :

$$\gamma_{cr}(\frac{d}{L}) = \frac{1}{7} \text{ thkd} \quad (25)$$

L'emploi du modèle linéaire est donc soumis, outre les conditions de faible cambrure et de faible amplitude, à la condition supplémentaire de non déferlement

$$\frac{H}{L} \leq \gamma_{cr}(\frac{d}{L}) \quad (26)$$

Ce critère définit les houles "possibles" pour une profondeur d'eau donnée. On notera  $\mathcal{H}$  l'ensemble des triplets (H,L,d) satisfaisant à la condition (26).

#### 4. Calcul de la pression sur le fond sous-marin

On se propose de donner l'expression de la pression  $P(x, -d, t)$  exercée par le fluide en mouvement sur le plan d'équation  $y = -d$  qui coïncide avec la face supérieure du massif sous-marin. L'écoulement étant irrotationnel, cette quantité est fournie par le théorème de Bernoulli exprimé en (5). En adoptant la détermination du potentiel choisie pour écrire (9), et en négligeant les termes en  $\underline{U}^2$  dans l'expression de la charge hydraulique  $h$ , on obtient :

$$P(x, y, t) = -\rho g y - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, y, t) \quad (27)$$

La pression  $p(x, t)$  s'exerçant sur le fond sous-marin vaut donc

$$p(x, t) = P(x, -d, t) = \rho g d - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, -d, t) \quad (28)$$

Elle est la somme du terme hydrostatique  $\rho g d$  et d'une surpression donnée par  $-\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, -d, t)$  due au mouvement du fluide. Ce dernier terme, noté  $p_h(x, t)$  dans la suite, présente un intérêt de tout premier plan pour un calcul de stabilité puisqu'il quantifie l'action de la houle sur le massif sous-marin. L'expression de  $p_h(x, t)$  pour la théorie linéaire résulte de (23b) :

$$p_h(x, t) = \frac{\gamma_w H}{2 \cosh(kd)} \cos k(x - \frac{L}{T}t) \quad (29)$$

où l'on a noté  $\gamma_w$  le poids volumique  $\rho g$  de l'eau. Dans le domaine des faibles profondeurs relatives ( $\frac{d}{L} \ll 1$ ), l'équation (29) jointe à (23b) fournit :

$$p(x, t) \approx \gamma_w (d + \eta(x, t)) \quad (30)$$

En dehors de ce cas limite où la pression qui s'exerce sur le fond marin peut être calculée comme en hydrostatique, (29) montre que l'effet de la profondeur est un amortissement exponentiel de "l'amplitude hydrostatique"  $\gamma_w \frac{H}{2}$ , par le biais du facteur  $\frac{1}{\cosh kd}$ . A hauteur de vague  $H$  et profondeur d'eau  $d$  données, cela signifie que les longueurs d'onde les plus courtes seront les plus atténuées.

On aura observé que la théorie de Stokes a été développée dans l'hypothèse d'un fond marin imperméable (Eq.(6)). Il convient donc de s'interroger sur la pertinence d'un tel modèle dans le cas d'un fond marin poreux. Les travaux de Reid et Kajiura (1957) ont montré que le champ de pressions exercé par la houle sur le fond marin n'était affecté par la porosité de celui-ci que dans le cas de perméabilités très sensiblement supérieures à celles des sables. Dans la majorité des situations pratiques, la porosité du massif pourra donc être

*négligée du point de vue du calcul des pressions qui s'exercent sur sa frontière.*

## 2 - EXTENSIONS DE LA THÉORIE LINÉAIRE

### 1. Généralisation de la théorie linéaire au cas d'un fond faiblement incliné

On s'intéresse à la propagation d'une houle le long de la ligne de plus grande pente d'un fond plan imperméable incliné d'un angle  $\chi$  sur l'horizontale (voir figure 2). Dans le domaine des grandes profondeurs d'eau, il s'agit d'une onde progressive doublement périodique par rapport à l'abscisse  $x$  (période  $L_0$ ) et par rapport au temps (période  $T$ ). La hauteur crête à creux  $y$  est notée  $H_0$ . Cette question a fait l'objet d'études expérimentales à l'aide de canaux à houle. Pour les faibles valeurs de  $\chi$ , elles ont permis de dégager les propriétés suivantes :

- en amont de la zone de déferlement, l'écoulement demeure périodique. La durée d'une oscillation de la surface libre est indépendante de la profondeur d'eau considérée et vaut  $T$ .

- pour des profondeurs d'eau décroissantes à partir du "large", la hauteur crête à creux commence par diminuer légèrement puis augmente jusqu'au déferlement. La distance séparant deux crêtes consécutives est une fonction croissante de la profondeur d'eau.

Parmi les équations à vérifier par le potentiel  $\varphi$  des vitesses, les relations (2), (7) et (9) subsistent. En revanche, (6) doit être remplacé par :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \operatorname{tg} \chi \quad (31)$$

La solution déterminée au paragraphe 3 ne saurait donc être utilisée sans aménagement. Toutefois, dans le cas où  $\chi$  est un infiniment petit, on fait appel classiquement aux résultats de la théorie linéaire pour modéliser l'écoulement en amont de la zone de déferlement. Une telle



simplification est cohérente avec la linéarisation à laquelle il a été procédé pour obtenir (14). Cependant, les observations expérimentales imposent que les valeurs de la hauteur crête à creux  $H$  et de la longueur d'onde  $L$  soient "actualisées" en fonction de la profondeur d'eau.

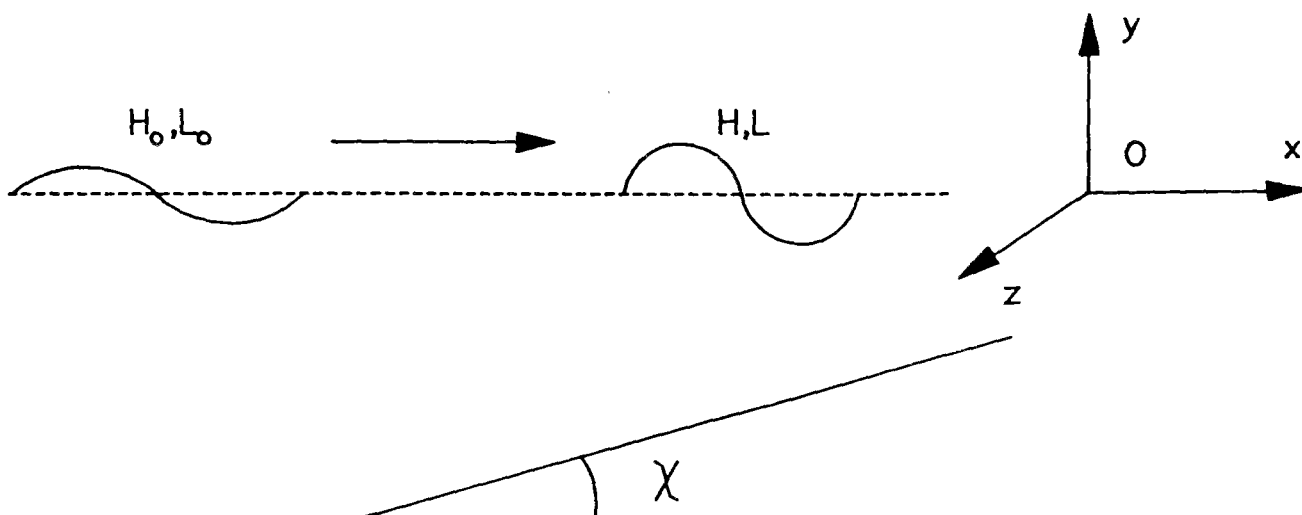


figure 2 : propagation de la houle sur fond incliné

La relation de dispersion (24) rend compte de la décroissance de  $L$  observée à mesure que la profondeur d'eau  $d$  diminue. Il reste à quantifier les variations de  $H$  en fonction de  $\chi$ . Le calcul s'appuie sur le principe de la conservation de l'énergie entre le "large" et une profondeur d'eau  $d$  donnée. Plus précisément, on note  $W$  l'énergie transmise par l'écoulement au cours d'une période à travers une bande de largeur unité d'un plan vertical parallèle à  $Oz$ . La périodicité de l'écoulement impose que  $W$  soit indépendante de la profondeur d'eau. Par définition de  $W$ , et en utilisant (27), on a :

$$W = \int_0^T dt \int_{-d}^{\eta(x,t)} \left( -\rho g y - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy \quad (32)$$

En négligeant la contribution à l'intégrale ci-dessus du domaine d'intégration  $y \in [0, \eta(x, t)]$  et avec l'expression de  $\varphi$  donnée en (23), il vient :

$$W = \frac{1}{16} \rho g L H^2 \left[ 1 + \frac{2kd}{\text{sh} 2kd} \right] \quad (33)$$

(33) donne en particulier l'expression de  $W$  en fonction des caractéristiques de la houle "au large" :

$$W = \frac{\rho g L}{16} H_o^2 \quad (34)$$

Une combinaison de (24), (33) et (34) fournit enfin :

$$H = H_o \left\{ \tanh kd \left( 1 + \frac{2kd}{\sinh 2kd} \right) \right\}^{-1/2} \quad (35)$$

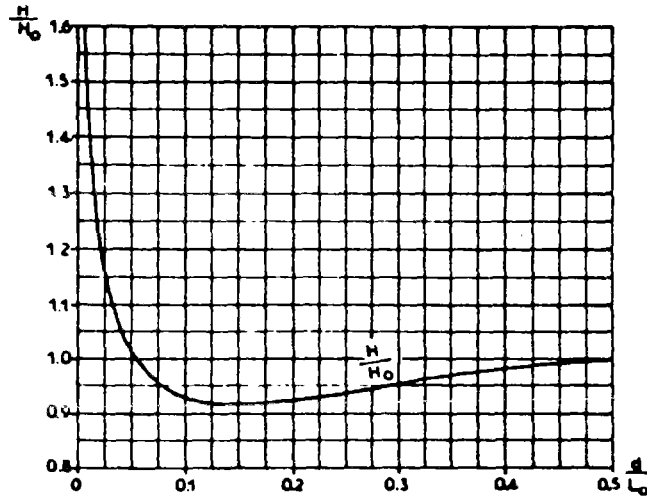


figure 3 : variations de la hauteur de vagues

La figure 3 présente les variations de  $H$ , prévues par (35) en fonction de la profondeur d'eau. Elles sont en bon accord avec les observations expérimentales.

## 2. Théories non linéaires de Stokes

Le problème posé est toujours celui de la recherche d'une onde plane se propageant parallèlement à  $Ox$ , périodique par rapport à  $x$  et  $t$ . Lorsque les conditions de faible cambrure ( $\frac{H}{L} \ll 1$ ) et de faible amplitude ( $\frac{H}{d} \ll 1$ ) ne sont plus satisfaites, les termes non linéaires des équations (7) et (9) doivent être pris en compte. En outre, il n'est plus possible d'approcher la valeur de  $\phi$  ou de ses dérivées en  $y=\eta(x,t)$  par la valeur en  $y=0$ .

On fait alors appel classiquement aux théories non linéaires de Stokes, qui consistent à rechercher le potentiel des vitesses sous la forme d'un développement limité suivant les puissances croissantes de la cambrure (voir par exemple l'ouvrage de P. et C. Aristaghes, 1985). Par ailleurs, pour l'écriture des conditions de surface libre, on remplace les dérivées de la fonction  $\phi$  par un développement limité de ces quantités au voisinage de  $y=0$  à un ordre approprié. Dans la théorie de Stokes d'ordre  $n$ , le potentiel des vitesses prend la forme suivante :

$$\phi^{(n)}(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(H, L, d) \operatorname{ch} ik(y+d) \sin ik(x - \frac{L}{T}t) \quad (36)$$

Le rapport  $\phi_{i+1}/\phi_i$  des amplitudes de deux termes consécutifs du potentiel est de l'ordre de la cambrure. Les puissances successives de la cambrure apparaissent donc comme des termes correctifs par rapport à la théorie linéaire. La pression s'exerçant sur le fond marin prend la forme suivante :

$$p^{(n)}(x, t) = \gamma_w d + \sum_{i=1}^n p_{i-1}(H, L, d) \cos ik(x - \frac{L}{T}t) \quad (37)$$

Pour  $n=1$ , on retrouve évidemment la théorie linéaire, qui porte à ce titre le nom de théorie de Stokes d'ordre 1. La valeur de  $p_0$  a été donnée en (29). On utilisera également dans la suite l'expression ci-dessous du coefficient  $p_1$  pour des calculs de stabilité avec la houle d'ordre 2 :

$$p_1(H, L, d) = \frac{3}{8} \pi \gamma_w \frac{H^2}{L} \frac{\operatorname{th} kd}{(\operatorname{sh} kd)^2} \left( \frac{1}{(\operatorname{sh} kd)^2} - \frac{1}{3} \right) \quad (38)$$

On désigne par  $\mathcal{P}_n$  l'application de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^n$  qui associe à  $H, L$  et  $d$  le  $n$ -uplet  $(p_0; \dots; p_{n-1})$  des amplitudes présentes dans l'expression de  $p^{(n)}(x, t)$ .

### 3. Extension d'une houle d'amplitude variable

Dans la pratique du génie maritime, la houle est le plus souvent

caractérisée par la donnée de la hauteur des vagues et de la période (ou de la longueur d'onde). C'est la notion de houle de projet. La donnée supplémentaire de la profondeur d'eau permet alors d'utiliser l'une ou l'autre des modélisations mathématiques entrevues précédemment. Cependant, ce type de définition de l'écoulement présente l'inconvénient de ne fournir aucune indication sur le processus de formation de la houle. Or cette information peut être nécessaire par exemple pour l'étude de la réponse d'un massif sous-marin ou d'une structure offshore lorsque son comportement est non linéaire.

Il est délicat de modéliser le processus conduisant à la formation d'une houle de période et d'amplitude données. Cependant, il est tentant d'étendre les résultats de la théorie de Stokes à une houle d'amplitude variable en fonction du temps. En admettant que la période  $T$  se conserve, une telle extension est licite à condition que la variation relative de  $H$  par cycle soit petite. On note alors  $\mathcal{P}_t$  le triplet  $(H(t), L, d)$ . L'expression de la pression sur le fond marin est obtenue à partir de (37) en remplaçant le  $n$ -uplet  $(p_0, \dots, p_{n-1})$  par  $\mathcal{P}_n(\mathcal{P}_t)$ . Toutefois, la portée pratique de cette remarque est limitée actuellement par le peu d'informations disponibles sur le processus de formation d'une tempête. Il semble en particulier qu'il soit peu réaliste de supposer que la période  $T$  reste constante.

### 3 - CONCLUSION

Ce chapitre préliminaire s'est concentré sur la théorie linéaire de la houle en raison de son importance dans la pratique. Tant l'étude du problème élastique que celle de la stabilité y feront tout particulièrement référence. Des théories non linéaires ont également été évoquées. Il faut y faire appel lorsque l'onde étudiée sort du domaine des faibles amplitudes et cambrures.

Cependant, il importe de ne pas perdre de vue qu'un modèle (linéaire ou non) n'est jamais qu'une solution mathématique particulière d'un

problème de propagation d'ondes, obtenue au prix de plusieurs simplifications majeures. Il va de soi que la houle réelle présente rarement un aspect aussi régulier. En revanche, il est souvent possible de considérer qu'elle résulte de la superposition d'un grand nombre d'ondes monochromatiques, la théorie linéaire permettant de donner un sens à cette sommation.

Il est donc souhaitable d'aborder les problèmes d'élasticité et de stabilité avec une certaine souplesse dans le choix des modèles de houles. C'est pourquoi l'on s'efforcera de dégager, le plus souvent possible, des résultats qui ne fassent pas appel à une forme particulière de la pression s'exerçant sur le fond marin.

## CHAPITRE II : LE PROBLEME ELASTIQUE

### 1 - INTRODUCTION

On considère un massif de sol sous-marin occupant le demi-espace  $\Omega$  délimité supérieurement par le plan horizontal  $y=0$ . Ce massif immergé est soumis à l'action des forces volumiques de pesanteur et à une distribution de forces surfaciques rassemblant les effets de la pression hydrostatique et de la houle de surface (figure 1). On se propose dans ce chapitre de présenter des solutions du problème élastique.

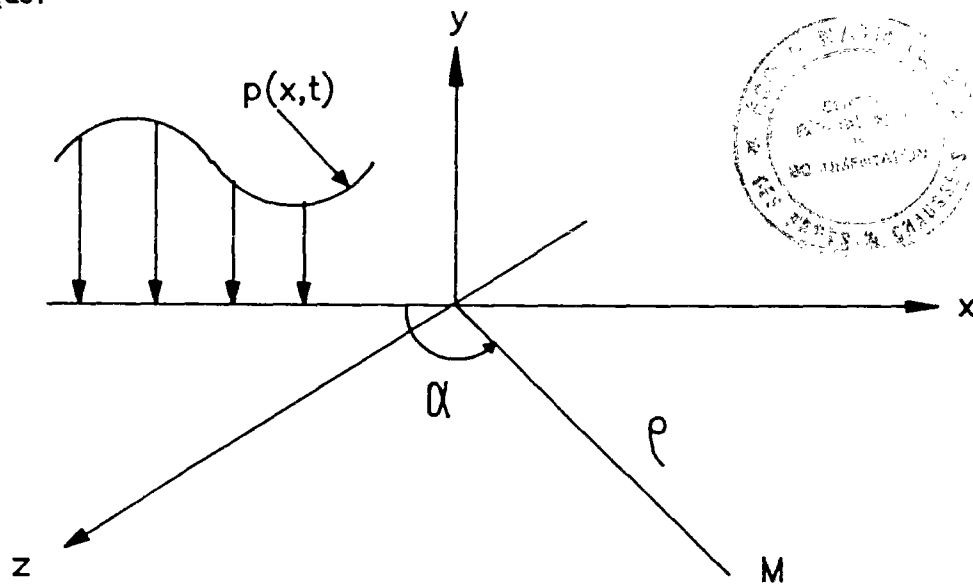


figure 1 : schéma de principe

Le sol saturé étant un milieu biphasique par nature, il s'agit tout d'abord de définir à quoi se rapporte l'hypothèse de comportement élastique. On distingue traditionnellement dans l'usage de la mécanique des sols deux niveaux de schématisation à l'intérieur de la modélisation élastique. Le plus simpliste consiste à faire abstraction du caractère biphasique du sol. Le massif est alors traité comme un milieu continu constitué par un matériau élastique. A ce niveau d'approximation, il n'y a aucune illusion à se faire sur le "réalisme"

du modèle. Son principal intérêt est de fournir un champ de contraintes statiquement admissible avec la distribution de pressions s'exerçant sur le plan  $y = 0$ . Un tel champ sera utile au chapitre III. C'est la raison pour laquelle la réponse du massif ainsi modélisé à la sollicitation considérée sera étudiée au paragraphe 2.

Le deuxième niveau d'approximation prend en compte le caractère biphasique du sol. Les pores du squelette solide étant saturés par un fluide parfait à la pression  $u$ , on adopte l'hypothèse de Terzaghi qui propose une partition du tenseur  $\underline{\underline{\sigma}}$  des contraintes dites totales :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma'}} - u\underline{\underline{1}} \quad (1)$$

Le tenseur sphérique  $-u\underline{\underline{1}}$  de matrice  $-u\delta_1^j$  représente les contraintes dans le fluide. Le tenseur  $\underline{\underline{\sigma'}}$  décrit les contraintes dites effectives dans le squelette auquel se rapporte maintenant l'hypothèse d'élasticité.  $\underline{\underline{\sigma'}}$  sera donc relié au tenseur des déformations du squelette par la loi de comportement élastique. On peut montrer (cf. Coussy, 1988) que cette hypothèse est justifiée dans le cadre général d'une théorie thermoporoélastique lorsque la compressibilité des grains constituant le squelette, supposés isotropes, est très petite devant la compressibilité du milieu ouvert, ce que l'on supposera. La réponse du massif ainsi modélisé est étudiée au paragraphe 3.

Pour les deux niveaux d'approximation, le comportement élastique envisagé est linéaire, et le matériau est isotrope et homogène. On fait de plus l'hypothèse des transformations infinitésimales. On néglige les effets inertiels. En raison de l'hypothèse de comportement linéaire, les forces de pesanteur et la pression hydrostatique ne sont pas considérées explicitement et la distribution des forces surfaciques se rapporte à la surpression due à la houle.

Dans les paragraphes 2 et 3 consacrés respectivement aux milieux monophasique et biphasique, l'on étudie la réponse du massif à une répartition plane de pression de forme quelconque. Puis les résultats

obtenus sont appliqués au cas particulier important où la surpression est prévue par la théorie de Stokes d'ordre 1.



## 2 - LE CAS MONOPHASIQUE

### 2.a Le problème "A<sub>1</sub>"

Il s'agit d'étudier le comportement d'un massif monophasique élastique soumis à une répartition de pressions plane (indépendante de la coordonnée  $z$ ), s'exerçant sur le plan  $y=0$ . Elle est définie par une fonction numérique  $p(x,t)$ , où  $t$  désigne l'instant considéré, telle que la contrainte appliquée à  $t$  en un point d'abscisse  $x$  de la frontière du massif soit :

$$\underline{T}(x,t) = -p(x,t) \underline{1} \quad (2)$$

Cependant, puisque l'on néglige les effets inertiels, l'argument  $t$  sera omis dans la suite, et l'on notera simplement  $p(x)$  la fonction représentant la pression aux points d'abscisse  $x$ . Elle est supposée localement intégrable dans  $\mathbb{R}$ .

Etant donné un champ de vecteurs  $\underline{\xi}$  défini et  $C^1$  sur  $\Omega$ , un champ de contraintes  $\underline{\sigma}$  et un champ de déformations  $\underline{\varepsilon}$  lui sont associés par les relations :

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\underline{\sigma}) \underline{1}_3 \quad (3)$$

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\text{grad } \underline{\xi} + {}^t \text{grad } \underline{\xi}) \quad (4)$$

Défini à partir de la fonction  $p(\cdot)$ , le problème  $A_1$  consiste à déterminer un tel champ de vecteurs  $\underline{\xi}$ , *indépendant de  $z$* , pour lequel le champ  $\underline{\sigma}$  associé vérifie les conditions d'équilibre correspondant au chargement considéré, soit :

$$\text{div } \underline{\sigma} = \underline{0} \quad (5)$$

$$(\forall (x,z) \in \mathbb{R}^2) \quad \underline{\sigma}(x,0,z) \cdot \underline{1} = -p(x) \underline{1} \quad (6)$$

Dans la suite, la fonction  $p(.)$  étant donnée, on désignera par solution du problème  $A_1$ , un champ de vecteurs pour lequel les équations (3),(4),(5) et (6) sont satisfaites.

## 2.b construction d'une solution pour le problème $A_1$

Etant donnée une fonction numérique  $p(.)$  localement intégrable sur  $\mathbb{R}$ , on cherche à construire une solution  $\xi$  pour le problème  $A_1$  défini par  $p(.)$ .

L'Annexe n°1 rappelle les expressions du champ de déplacement  $\underline{\delta}$  et du champ de contraintes  $\underline{\mathcal{B}}$  de la "solution" du problème classique de Boussinesq qui étudie l'effet d'une charge linéique verticale appliquée à la frontière du demi-espace élastique le long de la droite d'équation  $x=y=0$ . Pour un réel  $X$  quelconque, on définit les champs  $\underline{\mathcal{B}}^X$  et  $\underline{\delta}^X$  respectivement à partir de  $\underline{\mathcal{B}}$  et  $\underline{\delta}$  par une translation selon le vecteur  $X\underline{1}$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{B}}^X(\underline{M}) &= \underline{\mathcal{B}}(\underline{M} - X\underline{1}) \\ \underline{\delta}^X(\underline{M}) &= \underline{\delta}(\underline{M} - X\underline{1}) \end{aligned} \quad (7)$$

Une idée naturelle pour mettre en oeuvre la méthode des déplacements consiste à examiner à quelles conditions à vérifier par  $p(.)$  le champ de déplacements  $\xi$  défini par

$$\xi = \int_{\mathbb{R}} p(X) \underline{\delta}^X dX \quad (8)$$

répond à la question. Mais on peut lui préférer la méthode des contraintes en cherchant cette fois des conditions pour que le champ  $\sigma$  défini par

$$\sigma = \int_{\mathbb{R}} p(X) \underline{\mathcal{B}}^X dX \quad (9)$$

soit associé par la loi de comportement à une solution du problème  $A_1$ . C'est le choix qui a été fait. Il confère à ce paragraphe l'articulation suivante :

- on recherche tout d'abord des conditions assurant que le champ  $\underline{\sigma}$  de (9) existe et qu'il est statiquement admissible avec le champ de pressions défini par  $p(\cdot)$ .

- on établit l'existence d'une solution de  $A_1$  associée à  $\underline{\sigma}$

- on recherche ensuite des conditions assurant que  $\xi$  défini par (8) existe puis l'on montre que ce champ, lorsqu'il existe, est associé à  $\underline{\sigma}$  par (3) et (4).

### 2.b.1 étude du champ $\underline{\sigma}$ défini par (9)

A partir des fonctions  $\theta$  et  $R$  définies pour  $y \neq 0$  par:

$$R = \sqrt{(x-X)^2 + y^2} \quad \theta = \text{Arctg}\left(\frac{X-x}{y}\right) \quad (10)$$

on obtient une expression intégrale pour chaque composante du champ  $\underline{\sigma}$  au point  $M(x, y, z)$  de  $\Omega - \partial\Omega$  :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(X) \frac{\cos\theta \sin^2\theta}{R} dX \\ \sigma_{yy} &= -\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(X) \frac{\cos^3\theta}{R} dX \\ \sigma_{xy} &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(X) \frac{\cos^2\theta \sin\theta}{R} dX \\ \sigma_{zz} &= -\frac{2}{\pi} \nu \int_{-\infty}^{+\infty} p(X) \frac{\cos\theta}{R} dX \end{aligned} \quad (11)$$

et  $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ . Les intégrales introduites en (11), de même que celles de (8) et (9) sont pour l'instant purement formelles, en l'absence d'hypothèses supplémentaires sur la fonction  $p(\cdot)$  permettant d'assurer

leur convergence. Il s'agit ici et dans toute la suite, sauf mention explicite du contraire, de la convergence au sens des intégrales de Riemann généralisées, encore appelées intégrales impropres. Un rappel de définitions relatives à cette théorie de l'intégration et de certains résultats classiques s'y rapportant sont donnés à l'Annexe 2.

Si l'on introduit le changement de variable  $\delta = \frac{X-x}{y}$ , manifestement  $C^1$  et bijectif pour  $y \neq 0$ , dans les intégrales de (11), on obtient formellement une nouvelle expression des composantes de  $\underline{\sigma}$ , ayant des propriétés de convergence équivalentes pour  $(x,y) \in \Omega - \partial\Omega$  :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x+\delta y) \frac{\delta^2 d\delta}{(1+\delta^2)^2} \\ \sigma_{yy} &= -\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x+\delta y) \frac{d\delta}{(1+\delta^2)^2} \\ \sigma_{xy} &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x+\delta y) \frac{\delta d\delta}{(1+\delta^2)^2} \\ \sigma_{zz} &= -\frac{2}{\pi} \nu \int_{-\infty}^{+\infty} p(x+\delta y) \frac{d\delta}{1+\delta^2}\end{aligned}\tag{12}$$

L'avantage des expressions données en (12) pour les  $\sigma_{ij}$  sur celles données en (11) réside dans le fait que les premières ont un sens pour  $y=0$ , sans qu'il soit nécessaire de formuler de conditions sur  $p(\cdot)$ . Elles permettent donc de définir un prolongement de  $\underline{\sigma}$  à  $\Omega$  tout entier. On va s'attacher dans ce qui suit à dégager un jeu d'hypothèses le plus faible possible à vérifier par  $p(\cdot)$  permettant d'assurer l'existence dans  $\Omega$  de  $\underline{\sigma}$  défini par (12) et de bâtir à partir de ce champ une solution  $\xi$  des problèmes posés.

En raison de la nature physique de  $p(\cdot)$  qui représente la pression due à la houle sur le fond marin, il est naturel de supposer que  $p(\cdot)$  est borné en valeur absolue. On note  $\|p\|_{\infty}$  le réel  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |p(x)|$ . On définit

de plus, pour 2 entiers naturels  $n$  et  $p$  donnés, la fonction  $f_p^n$  par

$$f_p^n(\delta) = \frac{\delta^n}{(1+\delta^2)^p} \quad (13)$$

Il est immédiat de vérifier que l'intégrale  $I_p^n$  de  $f_p^n$  sur  $\mathbb{R}$

$$I_p^n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_p^n(\delta) d\delta \quad (14)$$

converge absolument si et seulement si  $2p-n \geq 2$ . On observe alors que, pour toute valeur de  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ , les intégrandes dans les expressions données en (12) pour  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  et  $\sigma_{zz}$  sont majorées en valeur absolue respectivement par  $\|p\|_{\infty} \cdot f_1^0$ . Ceci assure la convergence normale et donc, en vertu du théorème n°1 de l'Annexe 2, la convergence uniforme sur  $\Omega$  des intégrales définissant  $\underline{\sigma}$ . Si l'on suppose de plus que la fonction  $p(\cdot)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , (ce qui assure au passage l'intégrabilité locale), le théorème n°2 de l'Annexe 2 permet d'affirmer que le champ  $\underline{\sigma}$  est continu sur  $\Omega$ . On vérifie, en faisant  $y=0$  dans les expressions (12) de  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  que la condition (6) est satisfaite.

Réciproquement, (6) montre que la continuité de  $p(\cdot)$  sur  $\mathbb{R}$  est une condition nécessaire pour que celle de  $\underline{\sigma}$  soit assurée sur  $\partial\Omega$ . Toutefois, sur le plan mathématique, il est intéressant de noter que la continuité de  $\underline{\sigma}$  dans  $\Omega - \partial\Omega$  est acquise dès lors que  $p(\cdot)$  est bornée en valeur absolue sur  $\mathbb{R}$ , même si cette fonction présente des discontinuités. De plus, si  $p(\cdot)$  est borné en valeur absolue et continue en dehors d'une partie  $I$  dénombrable de  $\mathbb{R}$ , alors  $\underline{\sigma}$  est continue sur  $\Omega - I \times \{0\}$ .

Sous l'hypothèse que  $p(\cdot)$  est borné en valeur absolue sur  $\mathbb{R}$ , on peut montrer (voir à l'Annexe 3) que les composantes de  $\underline{\sigma}$  sont des fonctions  $C^\infty$  sur l'ouvert  $\Omega - \partial\Omega$  et que les dérivations par rapport à  $x$  et  $y$  sont obtenues en dérivant directement sous le signe  $\int$ . On obtient en particulier

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x+\delta y)}{y} \cdot \frac{\delta(1-\delta^2)}{(1+\delta^2)^3} d\delta \quad (15)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x+\delta y)}{y} \cdot \frac{1-3\delta^2}{(1+\delta^2)^3} d\delta$$

qui prouve que l'équation (5) est satisfaite. Si donc  $p(\cdot)$  est continue et bornée sur  $\mathbb{R}$ , alors le champ  $\underline{\sigma}$  est statiquement admissible avec les pressions définies par  $p(\cdot)$ .

Il s'agit maintenant d'examiner si le champ de déformations  $\underline{\varepsilon}$  associé à  $\underline{\sigma}$  par (3) satisfait à la condition de compatibilité. Celle-ci s'exprime en fonction des contraintes par l'équation de Beltrami, qui prend une forme simplifiée en déformations planes et en l'absence de forces de masse :

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \quad (16)$$

En introduisant la fonction numérique  $u$  définie sur  $\Omega$  par

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x+\delta y) \frac{d\delta}{1+\delta^2} \quad (17)$$

et en utilisant les expressions données en (12) pour  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$ , il est facile de voir que (16) est vérifiée si et seulement si  $u$  est harmonique. Cette propriété est établie à l'Annexe 3 et démontre la compatibilité géométrique de  $\underline{\varepsilon}$ .

En résumé, pour toute fonction numérique  $p(\cdot)$  continue et bornée en valeur absolue sur  $\mathbb{R}$ , (9) définit un champ de contraintes  $C^0$  sur  $\partial\Omega$ ,  $C^\infty$  dans  $\Omega - \partial\Omega$ , statiquement admissible avec le champ de pressions défini par  $p(\cdot)$  et tel que le champ de déformations  $\underline{\varepsilon}$  associé à  $\underline{\sigma}$  par la loi de comportement soit intégrable. Il existe donc une

solution au problème  $A_1$ .

## 2.b.2 Une relation entre $\underline{g}$ et $u$

L'équation (17) a défini à partir de  $p(\cdot)$  une fonction numérique  $u(x,y)$  continue dans  $\Omega$ , et harmonique dans  $\Omega - \partial\Omega$ , qui est une solution du problème

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \\ u|_{\partial\Omega} &= p \end{aligned} \quad (18)$$

On se propose de mettre en évidence les relations existant entre le champ de contraintes  $\underline{g}$  défini en (9) et la fonction  $u$ . Pour  $(x,y) \in \Omega - \partial\Omega$ , une intégration par parties dans (17) fournit

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi y} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_0^{x+\delta y} p(t) dt \right) \frac{\delta d\delta}{(1+\delta^2)^2} \quad (19)$$

Puisque la fonction  $p(\cdot)$  est bornée en valeur absolue, l'échange des opérateurs  $\int$  et  $\frac{\partial}{\partial x}$  ou  $\frac{\partial}{\partial y}$  est licite et l'on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{\pi y} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x+\delta y) \frac{\delta d\delta}{(1+\delta^2)^2} \quad (20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2}{\pi y} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x+\delta y) \frac{\delta^2 d\delta}{(1+\delta^2)^2} - \frac{u}{y} \quad (21)$$

En comparant (20) et (21) avec (12), les identités suivantes apparaissent:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -u - y \frac{\partial u}{\partial y} \\ \sigma_{yy} &= -u + y \frac{\partial u}{\partial y} \\ \sigma_{xy} &= y \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_{zz} &= -2\nu u \end{aligned} \quad (22)$$

On observera que la validité des équations (22) est assurée dès lors que  $p(\cdot)$  est continue et bornée en valeur absolue sur  $\mathbb{R}$ .

L'intérêt majeur de ces relations réside dans le fait qu'elles

permettent d'accéder aux composantes de  $\underline{\sigma}$  lorsque la fonction  $u(x,y)$  est connue. Cette remarque va être mise à profit au paragraphe 2.g qui traite de la houle linéaire. Les équations (22) rendront également des services au paragraphe 3 et au chapitre III.

### 2.b.3 étude du champ $\xi$ défini par (8)

On reprend comme hypothèses de départ que la fonction  $p(.)$  est continue et bornée sur  $\mathbb{R}$ . En utilisant (8) et les équations (A1.12) et (A1.14), il vient formellement pour  $y < 0$

$$\begin{aligned}\xi_x &= \frac{A+B}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} p(X) \theta dX - \frac{A-B}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} p(X) \sin \theta \cos \theta dX \\ \xi_y &= -A \int_{-\infty}^{+\infty} p(X) \ln R dX - \frac{A-B}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} p(X) \sin^2 \theta dX \\ \xi_z &= 0\end{aligned}\quad (23a)$$

où  $\theta$  et  $R$  ont été définis en (10) et pour  $y=0$

$$\begin{aligned}\xi_x &= \pi \frac{(A+B)}{4} \left[ \int_{-\infty}^x p(X) dX - \int_x^{+\infty} p(X) dX \right] \\ \xi_y &= -\frac{A}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} p(X) \ln(X-x)^2 dX - \frac{A-B}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} p(X) dX \\ \xi_z &= 0\end{aligned}\quad (23b)$$

ou encore en associant (23a) et (23b) :

$$\begin{aligned}\xi_x &= \frac{A+B}{2} \cdot I_1^{(x,y)}(p) - \frac{A-B}{2} \cdot I_2^{(x,y)}(p) \\ \xi_y &= -\frac{A}{2} \cdot I_3^{(x,y)}(p) - \frac{A-B}{2} \cdot I_4^{(x,y)}(p) \\ \xi_z &= 0\end{aligned}\quad (24)$$

où l'on a posé respectivement pour  $y \neq 0$  et  $y=0$  :



$$\begin{aligned}
I_1^{(x,y)}(p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(X) \arctg\left(\frac{X-x}{y}\right) dX & I_1^{(x,0)}(p) &= \frac{\pi}{2} \left[ \int_{-\infty}^x p(X) dX - \int_x^{+\infty} p(X) dX \right] \\
I_2^{(x,y)}(p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(X) \frac{(X-x)y}{(X-x)^2 + y^2} dX & I_2^{(x,0)}(p) &= 0 \\
I_3^{(x,y)}(p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(X) \ln((X-x)^2 + y^2) dX & I_3^{(x,0)}(p) &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} p(X) \ln|X-x| dX \\
I_4^{(x,y)}(p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(X) \frac{(X-x)^2}{(X-x)^2 + y^2} dX & I_4^{(x,0)}(p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(X) dX
\end{aligned} \tag{25}$$

L'étude du champ  $\xi$  défini par (24) et (25) est développée à l'Annexe n°4. On y établit que la convergence des deux intégrales

$$\mathcal{J}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(X) dX \quad \mathcal{L}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(X) \ln(1+X^2) dX \tag{26}$$

constitue une condition nécessaire et suffisante pour l'existence du champ  $\xi$  défini par (24), assurant de plus qu'il est continu dans  $\Omega$ , dérivable dans  $\Omega - \partial\Omega$ , et relié au champ  $\underline{\sigma}$  défini par (9) par les relations (3) et (4).

On prendra garde que la convergence des intégrales de (26) ne constitue pas une condition supplémentaire nécessaire pour assurer l'intégrabilité du champ  $\underline{\xi}$  associé au champ  $\underline{\sigma}$  de (9) par la loi de comportement (3). En effet, on a vu que  $\underline{\xi}$  est intégrable dès lors que la fonction  $p(\cdot)$  est continue et bornée en valeur absolue. On reviendra sur ce point au paragraphe 2.g.

**En résumé,** lorsque  $p(\cdot)$  est une fonction continue et bornée en valeur absolue sur  $\mathbb{R}$ , il existe un champ de déplacements solution du problème  $A_1$ . Si les intégrales  $\mathcal{L}(p)$  et  $\mathcal{J}(p)$  convergent, le champ  $\xi$  défini par (8) existe et résout le problème  $A_1$ .

## 2.c Considérations d'unicité de la solution. Problème "B<sub>1</sub>".

Les démonstrations de l'existence et l'unicité de la solution d'un problème d'Elasticité sont obtenues classiquement en posant celui-ci sous forme variationnelle. On se propose d'en rappeler brièvement les idées.

On suppose par exemple que les déplacements sont donnés sur une partie  $\Gamma_0$  (de mesure non nulle) de la frontière  $\Gamma$  du domaine  $\Omega$  sollicité, et que les contraintes sont imposées sur le complémentaire  $\Gamma_1$  de  $\Gamma_0$  dans  $\Gamma$ . Il n'est pas restrictif de supposer que les déplacements imposés sur  $\Gamma_0$  sont nuls. On introduit l'ensemble  $V$  défini par :

$$V = \left\{ \underline{v} \in (H^1(\Omega))^3, \gamma_0 \underline{v} = \underline{0} \right\} \quad (27)$$

où  $\gamma_0 \underline{v}$  désigne la trace de  $\underline{v}$  sur  $\Gamma_0$ . L'application "trace" est un opérateur continu de  $(H^1(\Omega))^3$  dans  $\Gamma_0$ , ce qui assure que  $V$  est bien un espace de Hilbert pour la norme induite par celle de  $(H^1(\Omega))^3$ . La formulation variationnelle du problème d'élasticité prend alors la forme suivante : trouver  $\underline{u} \in V$  tel que :

$$(\forall \underline{v} \in V) \quad a(\underline{u}, \underline{v}) = L(\underline{v}) \quad (28)$$

où  $L$  est une forme linéaire continue sur  $V$  qui représente la puissance des forces extérieures dans le champ "de vitesses"  $\underline{v}$  et  $a(\underline{u}, \underline{v})$  désigne la forme bilinéaire continue définie par :

$$a(\underline{u}, \underline{v}) = \lambda \int_{\Omega} (\text{tr} \underline{\varepsilon}(\underline{u})) (\text{tr}(\underline{\varepsilon}(\underline{v}))) d\Omega + 2\mu \int_{\Omega} \underline{\varepsilon}(\underline{u}) : \underline{\varepsilon}(\underline{v}) d\Omega \quad (29)$$

L'existence d'une solution  $\underline{u}$  au problème ainsi posé résulte du théorème de Lax-Milgram sous réserve de la  $V$ -ellipticité de la forme bilinéaire  $a$ , c'est-à-dire de l'existence d'un scalaire  $A > 0$  tel que :

$$(\forall \underline{v} \in V) \quad a(\underline{v}, \underline{v}) \geq A \|\underline{v}\|_1^2 \quad (30)$$

où  $\|\underline{v}\|_1$  représente la norme de  $\underline{v}$  au sens usuel dans  $(H^1(\Omega))^3$ . C'est également la V-ellipticité qui permet de conclure à l'unicité de la solution  $\underline{u}$  de (28). S'agissant de la forme  $a$  de (29), la propriété (30) n'est acquise que si le domaine  $\Omega$  est borné. Elle résulte alors de l'inégalité de Korn qui assure que l'application :

$$\underline{v} \in (H^1(\Omega))^3 \rightarrow \left\{ \|\underline{v}\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i,j=1}^3 \|\varepsilon_{ij}(\underline{v})\|_{0,\Omega}^2 \right\}^{1/2} \quad (31)$$

où  $\|\cdot\|_{0,\Omega}$  désigne la norme de  $L^2(\Omega)$ , est une norme équivalente à celle de  $(H^1(\Omega))^3$ .

Dans le cas d'un domaine  $\Omega$  infini, un résultat général d'existence et d'unicité n'est plus assuré, à défaut de la V-ellipticité de la forme bilinéaire  $a$ . On se heurte de plus à la question de la généralisation de la notion de condition aux limites. En particulier, l'unicité de la solution  $\underline{\xi}$  du problème  $A_1$ , quand elle existe, n'est pas assurée. On est ainsi amené à rechercher un espace vectoriel de fonctions  $\underline{\xi}$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^3$  de classe  $C^1$ , représentant des champs de déplacements, dans lequel il y ait existence et unicité de la solution des équations (3),(4),(5),(6). Intuitivement, il paraît nécessaire de préciser le comportement de la solution à l'infini si l'on veut la définir de manière unique. On introduit donc l'espace vectoriel  $\mathcal{E}$  des champs de vecteurs possédant les propriétés suivantes, exprimées dans les coordonnées polaires  $(\rho, \alpha)$  définies sur la figure 1 :

$$(i) \quad (\forall \alpha \in ]0, \pi[) \lim_{\rho \rightarrow \infty} \underline{\xi}(\rho, \alpha) = 0$$

$$(ii) \quad \text{la fonction } (\rho, \alpha) \rightarrow \|\underline{\xi}(\rho, \alpha)\| \text{ est bornée dans } \mathbb{R}^+ \times [0, \pi]$$

(iii) la fonction  $(\rho, \alpha) \rightarrow \rho \|\underline{\underline{\xi}}(\rho, \alpha)\|$  est bornée dans  $\mathbb{R}^+ \times [0, \pi]$ , la norme du tenseur  $\underline{\underline{\xi}}(\rho, \alpha)$  étant définie par  $\|\underline{\underline{\xi}}(\rho, \alpha)\| = \{\underline{\underline{\xi}}(\rho, \alpha) : \underline{\underline{\xi}}(\rho, \alpha)\}^{1/2}$ . Il est clair que si  $\underline{\underline{\xi}}$  possède cette propriété, alors la proposition obtenue en remplaçant  $\underline{\underline{\xi}}$  par  $\underline{\underline{\sigma}}$  est également assurée.

On désignera par *solution du problème  $B_1$*  l'unique solution dans  $\mathcal{E}$  du

problème  $A_1$ , lorsqu'elle existe. Il s'agit tout d'abord d'établir cette unicité du champ  $\xi$  solution du problème  $B_1$ . C'est l'objet du paragraphe 2.d. On dégagera ensuite au paragraphe 2.e des conditions nécessaires pour l'existence d'une solution à ce même problème. Il restera alors, au paragraphe 2.f, à définir une classe de fonctions  $p(\cdot)$  (la plus vaste possible) pour lesquelles une solution du problème  $B_1$  peut être explicitée.

## 2.d Unicité de la solution du problème $B_1$ lorsqu'elle existe

Pour établir l'unicité de la solution du problème  $B_1$ , si elle existe, il suffit de prouver que le champ de vecteurs nul est l'unique solution du problème  $B_1$  défini par la fonction  $p(x)=0$ .

Soit donc  $\xi$  un champ de vecteurs qui résoud ce problème, et  $\underline{\sigma}$  et  $\underline{\varepsilon}$  les champs de contraintes et de déformations qui lui sont associés par (3) et (4). Le travail de déformations dans le demi-disque  $D_\rho$  de centre 0 et de rayon  $\rho$  est égal au travail des forces extérieures agissant sur la frontière de ce domaine. Il vient donc, en notant  $A$  le tenseur des modules d'élasticité

$$\int_{D_\rho} \underline{\varepsilon} : A : \underline{\varepsilon} d\Omega = \int_{C_\rho} \xi \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} dS \quad (32)$$

où  $C_\rho$  désigne l'arc de cercle délimitant la frontière de  $D_\rho$  dans l'intérieur de  $\Omega$ . On va établir que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{C_\rho} \xi \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} dS = 0 \quad (33)$$

Comme la quantité  $\underline{\varepsilon} : A : \underline{\varepsilon}$  est positive, (33) et la continuité de  $\underline{\varepsilon}$  imposeront qu'elle est nulle dans tout le demi-espace, c'est-à-dire que  $\underline{\varepsilon}=0$ . Pour en conclure que  $\xi=0$ , il restera à observer que les champs rigidifiants ne satisfont pas la condition (1).

Dans le système de coordonnées polaires de la figure 1, on note  $u$  et  $v$  les composantes radiale et orthoradiale du déplacement et l'on a:

$$\xi \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = u \sigma_{\rho\rho} + v \sigma_{\rho\alpha} = 2\mu(u \varepsilon_{\rho\rho} + v \varepsilon_{\rho\alpha}) + \lambda \operatorname{tr}(\underline{\varepsilon}) \quad (34)$$

Il vient donc

$$\int_C \xi \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \, dS = 2\mu \int_0^\pi (u \cdot \rho \varepsilon_{\rho\rho} + v \cdot \rho \varepsilon_{\rho\theta}) d\alpha + \lambda \int_0^\pi u \cdot \rho \cdot \operatorname{tr}(\underline{\varepsilon}) d\alpha \quad (35)$$

En explicitant la relation (1), on obtient

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} u(\rho, \alpha) = 0 \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} v(\rho, \alpha) = 0 \quad (36)$$

Comme de plus les fonctions  $u(\rho, \alpha)$ ,  $v(\rho, \alpha)$  et  $\rho \|\underline{\varepsilon}(\rho, \alpha)\|$  sont bornées dans  $\mathbb{R}^+ \times [0, \pi]$  d'après (ii) et (iii), le théorème de la convergence dominée s'applique pour le calcul de la limite cherchée et la propriété (33) en résulte. On trouvera une démonstration quelque peu différente de ce résultat d'unicité dans l'ouvrage de Muskhelishvili (1963) qui a recours à la théorie de la représentation complexe de la fonction d'Airy. Les hypothèses (i) à (iii) y sont introduites en prescrivant le comportement asymptotique du gradient de cette fonction.

## 2.e Conditions nécessaires d'existence de solution au problème $B_1$

On considère une fonction numérique  $p(x)$  localement intégrable sur  $\mathbb{R}$ . On se propose d'établir des conditions nécessaires à vérifier par  $p(\cdot)$  pour que le problème  $B_1$  défini en 2.a admette une solution. On observe tout d'abord, en associant la condition (6) et la propriété (iii) exprimée en fonction des contraintes, que la fonction  $x \rightarrow |xp(x)|$  est nécessairement bornée sur  $\mathbb{R}^-$ .

On introduit maintenant la fonction  $\Pi(\cdot)$  définie sur  $\mathbb{R}$  à partir de  $p(\cdot)$  par:

$$\Pi(\rho) = \int_{-\rho}^{+\rho} p(x) dx \quad (37)$$

et l'on suppose qu'il existe un champ de vecteurs  $\underline{\xi}$  solution du

problème  $B_1$  défini par  $p(\cdot)$ . On note  $\underline{\sigma}$  et  $\underline{\varepsilon}$  les champs de tenseurs associés à  $\underline{\xi}$  par (3) et (4). L'équilibre du demi-disque de centre 0 et de rayon  $\rho$  impose :

$$\int_{-\rho}^{+\rho} p(x) dx = \int_0^\pi \underline{l} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_r \rho d\theta \quad (38)$$

En explicitant l'intégrande du membre de droite, il vient :

$$\underline{l} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_r = -(\sigma_{\rho\rho} \sin\alpha + \sigma_{\rho\alpha} \cos\alpha) \quad (39)$$

Sous cette forme, on voit que la propriété (iii) impose que la quantité  $|\rho \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_r \cdot \underline{l}|$  soit bornée sur  $\mathbb{R}^+ \times [0, \pi]$ . La relation (38) entraîne alors que la fonction  $|\Pi(\cdot)|$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ . Ce résultat constitue une première condition nécessaire d'existence pour que le problème  $B_1$  admette une solution.

La deuxième condition qui va être établie dans ce qui suit est limitée à la classe des fonctions  $p(\cdot)$  pour lesquelles la quantité  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Pi(\rho)$  existe. On va montrer que la condition

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Pi(\rho) = 0 \quad (40)$$

est alors nécessaire pour l'existence d'une solution au problème  $B_1$ . Soit donc  $\mathfrak{p} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \Pi(\rho)$ . En explicitant dans (14) la relation entre  $\underline{\sigma}$  et  $\underline{\xi}$ , il vient :

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{e}_r \cdot \underline{l} = -(2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial \rho} \sin\alpha - \frac{\lambda \sin\alpha}{\rho} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} + u \right) - \mu \cos\alpha \left( \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \alpha} - v \right\} \right) \quad (41)$$

L'intégration de  $\underline{\sigma} \cdot \underline{e}_r \cdot \underline{l}$  sur  $C_\rho$  donne donc :

$$\int_{C_\rho} \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_r \cdot \underline{l} dl = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3 \quad (42)$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_1 &= - \int_0^\pi \rho \{ (2\mu + \lambda) \sin \alpha \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \mu \cos \alpha \cdot \frac{\partial v}{\partial \rho} \} d\alpha \\
\mathcal{J}_2 &= - \int_0^\pi (\lambda \sin \alpha \cdot u - \mu \cos \alpha \cdot v) d\alpha \\
\mathcal{J}_3 &= - \int_0^\pi (\lambda \sin \alpha \cdot \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \mu \cos \alpha \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha}) d\alpha
\end{aligned} \tag{43}$$

En utilisant le théorème de la convergence dominée, qui s'applique grace aux hypothèses (i) et (ii), il est facile de voir que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \mathcal{J}_2 = 0 \tag{44}$$

Puis l'on observe que

$$\int_0^\pi \sin \alpha \cdot \frac{\partial v}{\partial \alpha}(\rho, \alpha) d\alpha = \int_0^\pi \cos \alpha \cdot v(\rho, \alpha) d\alpha \tag{45}$$

De nouveau, l'emploi du théorème de la convergence dominée est fructueux :

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_0^\pi \cos \alpha \cdot v(\rho, \alpha) d\alpha = 0 \tag{46}$$

La démonstration d'un résultat analogue pour la deuxième intégrale de  $\mathcal{J}_3$ , c'est-à-dire

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_0^\pi \cos \alpha \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} d\alpha = 0 \tag{47}$$

est un peu moins évidente, à défaut d'informations sur  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} u(\rho, 0)$  et  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} u(\rho, \pi)$ . Soit donc un réel  $A \in ]0, \pi[$ . On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \cos \alpha \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha}(\rho, \alpha) d\alpha &= \int_A^{\pi-A} \cos \alpha \cdot u(\rho, \alpha) d\alpha - (u(\rho, \pi-A) + u(\rho, A)) \cos A \\
&\quad + \int_0^A \cos \alpha \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha}(\rho, \alpha) d\alpha + \int_{\pi-A}^\pi \cos \alpha \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha}(\rho, \alpha) d\alpha
\end{aligned} \tag{48}$$

La fonction  $(\rho, \alpha) \mapsto \cos \alpha \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha}(\rho, \alpha)$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+ \times [0, \pi]$  en vertu de la propriété (iii). Pour tout choix d'un réel  $\varepsilon > 0$ , il en résulte que

$$(\exists A \in ]0, \pi[)(\forall \rho \in \mathbb{R}^+) \left| \int_0^A \cos \alpha \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha}(\rho, \alpha) d\alpha + \int_{\pi-A}^{\pi} \cos \alpha \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha}(\rho, \alpha) d\alpha \right| < \varepsilon \quad (49)$$

Par ailleurs, une fois fixé un réel A tel que l'inégalité de (29) soit vérifiée, les propriétés (i) et (ii) et le théorème de la convergence dominée montrent que:

$$(\exists R > 0) \rho > R \Rightarrow \left| \int_A^{\pi-A} \cos \alpha \cdot u(\rho, \alpha) d\alpha - (u(\rho, \pi-A) + u(\rho, A)) \cos A \right| < \varepsilon \quad (50)$$

En utilisant (49) et (50) dans (48), il vient :

$$\rho > R \Rightarrow \left| \int_0^{\pi} \cos \alpha \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha}(\rho, \alpha) d\alpha \right| < 2\varepsilon \quad (51)$$

qui achève de démontrer l'identité (47). En associant (46) et (47), on obtient alors

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \mathcal{J}_3 = 0 \quad (52)$$

On est maintenant en mesure d'établir (40) en raisonnant par l'absurde. On suppose donc que  $\mathfrak{P} \neq 0$ . Les équations (42), (44) et (52) montrent que :

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\rho}{\mathfrak{P}} \cdot \int_0^{\pi} \left[ (2\mu + \lambda) \sin \alpha \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \mu \cos \alpha \cdot \frac{\partial v}{\partial \rho} \right] d\alpha = 1 \quad (53)$$

Introduisant la fonction  $\mathfrak{F}$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par

$$\mathfrak{F} : \rho \rightarrow \int_0^{\pi} \left[ (2\mu + \lambda) \sin \alpha \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho, \alpha) + \mu \cos \alpha \cdot \frac{\partial v}{\partial \rho}(\rho, \alpha) \right] d\alpha \quad (54)$$

l'équation (53) démontre que l'intégrale (au sens des intégrales impropres)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}(\rho) d\rho \quad (55)$$

diverge. Cependant, pour deux réels positifs a et b quelconques, il est facile de voir que:

$$\int_a^b \mathfrak{F}(\rho) d\rho = (2\mu + \lambda) \int_0^{\pi} \sin \alpha \cdot \{u(b, \alpha) - u(a, \alpha)\} d\alpha + \mu \int_0^{\pi} \cos \alpha \cdot \{v(b, \alpha) - v(a, \alpha)\} d\alpha \quad (56)$$



Encore une fois, on applique le théorème de la convergence dominée, et l'on obtient

$$\lim_{\substack{a \rightarrow \infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b \mathcal{F}(\rho) d\rho = 0 \quad (57)$$

(57) exprime la convergence de l'intégrale de (55) comme conséquence des hypothèses (i) et (ii). Il y a donc contradiction et (40) en résulte. En d'autres termes, *si la quantité  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Pi(\rho)$  existe, alors elle est nulle.*

On observera que l'existence de  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Pi(\rho)$  est en particulier assurée lorsque l'intégrale

$$\mathcal{J}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx \quad (58)$$

est convergente. Dans ce cas, pour qu'une solution au problème  $B_1$  existe, il est donc nécessaire que  $\mathcal{J}(p)=0$ .

## 2.f condition suffisante d'existence d'une solution au problème $B_1$

On reprend comme hypothèses de départ que la fonction  $p(\cdot)$  est continue et bornée sur  $\mathbb{R}$  et l'on recherche des conditions à vérifier par  $p(\cdot)$  pour que le champ  $\xi$  de (8) soit solution de  $B_1$ . L'Annexe 4 établit les résultats suivants :

- si  $p(\cdot)$  admet une primitive bornée en valeur absolue (ce qui est assurée si  $\mathcal{J}(p)$  converge), et si de plus la fonction  $x \rightarrow |xp(x)|$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ , alors la quantité  $\rho \|\underline{\sigma}(\rho, \alpha)\|$  est bornée dans  $\mathbb{R}^+ \times [0, \pi]$ .

- Sous l'hypothèse que l'intégrale  $\mathcal{J}(p)$  est absolument convergente, la condition

$$\mathcal{J}(p)=0 \quad (59)$$

est nécessaire et suffisante pour que le champ  $\xi$  possède les propriétés (i) et (ii). De plus, si la condition (59) n'est pas assurée, le champ  $\xi(M)$  tend asymptotiquement, lorsque  $\rho = OM \rightarrow \infty$ , vers le champ de déplacements associé à une charge linéique d'intensité  $\mathcal{J}(p)$

et défini à l'Annexe 1.

En résumé, si  $\mathcal{L}(p)$  est absolument convergente, que  $\mathcal{J}(p)=0$ , et que  $x \rightarrow |xp(x)|$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ , alors le champ de déplacements  $\xi$  de (8) constitue l'unique solution du problème  $B_1$ . Si  $\mathcal{J}(p)$  est non nulle, alors  $\xi$  tend asymptotiquement vers le champ de déplacements correspondant à une charge linéique d'intensité  $\mathcal{J}(p)$ .

## 2.g Application au problème de la houle linéaire.

Le cas particulier où la surpression due à la houle est calculée par la théorie de Stokes d'ordre 1 revêt une importance considérable qui justifie une étude spécifique. Ce paragraphe est donc consacré à l'étude de solutions au problème défini par la fonction

$$p(x)=p_0 \sin kx \quad (60)$$

On constate tout d'abord que la quantité  $|xp(x)|$  n'est pas bornée sur  $\mathbb{R}$ . Il n'y a donc pas de solution au problème  $B_1$ . En revanche, une solution  $\xi$  du problème  $A_1$  a été donnée par Fung (1965). Son calcul est décrit à l'Annexe n°5. On se propose ici de retrouver le résultat plus rapidement, comme corollaire des développements précédents.

La fonction de (60) étant manifestement continue et bornée, le champ  $\underline{\sigma}$  défini par (9) existe et satisfait à l'équation de Beltrami. Il existe donc un champ de déplacements pour lequel les équations (3), (4), (5), (6) sont satisfaites. La fonction  $u(x,y)$  définie en (17) est donnée par

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p_0 \frac{\sin k(x+\delta y)}{1+\delta^2} d\delta = \frac{\sin kx}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p_0 \frac{\cos k\delta y}{1+\delta^2} d\delta \quad (61)$$

Le calcul de l'intégrale de droite de (61) est immédiat par la méthode des résidus. On a en effet

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iky\delta}}{1+\delta^2} d\delta = -2i\pi. \text{Res}\left(\frac{e^{iky z}}{1+z^2}; -i\right) = \pi e^{ky} \quad (62)$$

où l'on a noté  $\text{Res}(f, z_0)$  le résidu de la fonction  $f(z)$  en  $z=z_0$ . En associant (61) et (62), il vient donc

$$u(x, y) = p_0 e^{ky} \sin(kx) \quad (63)$$

Les composantes de  $\underline{\sigma}$  résultent de (63) et (22) :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -p_0 e^{ky} \sin(kx) (1+ky) \\ \sigma_{yy} &= -p_0 e^{ky} \sin(kx) (1-ky) \\ \sigma_{xy} &= +p_0 e^{ky} \cos(kx) (ky) \\ \sigma_{zz} &= -2\nu p_0 e^{ky} \sin(kx) \end{aligned} \quad (64)$$

Puisque l'équation de Beltrami est satisfaite, le champ de déformations associé par (3) à  $\underline{\sigma}$  est intégrable et l'on vérifie que le champ de vecteurs  $\underline{\xi}$  défini ci-après est solution de l'équation (4)

$$\begin{aligned} \xi_x &= p_0 \frac{1+\nu}{E} \frac{e^{ky} \cos kx}{k} (1-2\nu+ky) \\ \xi_y &= -p_0 \frac{1+\nu}{E} \frac{e^{ky} \sin kx}{k} (2(1-\nu)-ky) \\ \xi_z &= 0 \end{aligned} \quad (65)$$

Il est important de noter que  $\underline{\xi}$  a été obtenu par intégration directe du champ de déformations associé au champ  $\underline{\sigma}$  défini de manière équivalente par (9) ou par (64). Il ne s'agit pas du champ de déplacements de (8) car ce dernier n'est pas défini pour la fonction  $p(\cdot)$  de (60). En effet, les intégrales  $\mathcal{J}(p)$  et  $\mathcal{L}(p)$  de (26) ne convergent pas. Le problème de la houle linéaire offre ainsi un exemple où le champ  $\underline{\sigma}$  de (9) existe sans que le champ  $\underline{\xi}$  de (8) soit défini.

### 3 - LE CAS BIPHASIQUE

Une répartition de pressions s'exerce comme au paragraphe 2 sur la frontière d'un massif occupant le demi-espace. Elle est définie selon (2) par une fonction numérique  $(x,t) \rightarrow p(x,t)$ , de classe  $C^1$  sur  $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ , et telle que

$$(\forall t \leq 0)(\forall x \in \mathbb{R}) \quad p(x,t) = 0 \quad (66)$$

Après avoir énoncé les équations auxquelles sont soumises les grandeurs physiques du problème, on considérera successivement le cas du massif poreux rigide, puis celui du massif poreux élastique dans l'hypothèse des petites perturbations pour le squelette.

#### 3.a. les équations et hypothèses de régularité

Le squelette constituant le massif est supposé *élastique linéaire*. On note  $\xi(x,y,t)$  le déplacement à l'instant  $t$  de la particule du squelette repérée par les coordonnées  $(x,y)$ . Le champ  $(x,y,t) \rightarrow \xi(x,y,t)$  est supposé de classe  $C^1$  dans  $\Omega \times \mathbb{R}$ . On note  $\underline{U}(x,y,t)$  le vecteur vitesse. Le tenseur  $\underline{d}$ , taux de déformations du squelette, et le tenseur  $\underline{\sigma}'$ , taux de contraintes effectives, sont reliés au champ  $\underline{U}$  par les relations :

$$\underline{d} = \frac{1}{2}(\text{grad } \underline{U} + {}^t \text{grad } \underline{U}) \quad (67a)$$

$$\underline{d} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\sigma}' - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\underline{\sigma}') \underline{I} \quad (67b)$$

Le vecteur  $\underline{V}(x,y,t)$  représente la vitesse relative de la particule fluide par rapport à la particule du squelette située au même point. La conservation de la masse pour le fluide supposé *incompressible* fournit

$$\text{div } \underline{V} = -\text{tr}(\underline{d}) = -\text{div } \underline{U} \quad (68)$$

On note  $u(x,y,t)$  la pression du fluide et  $\dot{u}(x,y,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t)$ . On formule, pour toute la suite du paragraphe 3, les hypothèses de régularité suivantes:

- A chaque instant  $t$ , les champs  $(x,y) \rightarrow u(x,y,t)$  et  $(x,y) \rightarrow \dot{u}(x,y,t)$  sont de classe  $C^0$  dans  $\partial\Omega$ ,  $C^2$  dans  $\Omega - \partial\Omega$ .
- Les champs  $\text{grad } u$  et  $\text{grad } \dot{u}$  sont continus sur  $\Omega \times \mathbb{R}$ .

L'équilibre du fluide dans l'écoulement quasi-statique s'écrit

$$-\gamma_w \underline{j} - \text{grad } u = \frac{\gamma_w}{k} \underline{V} \quad (69)$$

où  $k$  désigne la perméabilité (supposée isotrope) du squelette. La quantité  $-\gamma_w \underline{V}/k$  représente, en accord avec la loi de Darcy, les forces volumiques exercées par le squelette sur le fluide en raison de sa viscosité. En associant (68) et (69), on obtient

$$\frac{k}{\gamma_w} \Delta u = \text{div } \underline{U} \quad (70)$$

On suppose que la pression du fluide est continue au passage du plan  $y=0$ , ce qui revient à admettre que l'interface entre le milieu fluide pur et le massif poreux est parfaitement perméable. On a donc

$$u|_{\partial\Omega} = p(.,t) \quad (71)$$

et

$$\dot{u}'|_{\partial\Omega} \cdot \underline{j} = 0 \quad (72)$$

### 3.b le milieu poreux rigide

On s'intéresse d'abord au cas limite du milieu poreux indéformable ( $\underline{U}=0$ ). A chaque instant  $t$ , on définit, comme au paragraphe 2, deux problèmes à partir de la fonction  $p(.,t)$ . Pour alléger les notations, le temps  $t$  ne sera pas explicité dans la suite.

Une fonction numérique définie dans  $\Omega$ ,  $C^0$  dans  $\Omega$  et  $C^2$  dans  $\Omega - \partial\Omega$  est dite *solution du problème  $A_2$*  si et seulement si elle est harmonique dans  $\Omega - \partial\Omega$  et vérifie l'équation (71). Elle est *solution du problème  $B_2$*  si et seulement si elle possède de plus les propriétés suivantes :

- (j) la fonction  $(\rho, \alpha) \rightarrow |\rho \cdot u(\rho, \alpha)|$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+ \times [0, \pi]$

(jj)  $(\forall \alpha \in ]0, \pi[) \lim_{\rho \rightarrow \infty} \|\text{grad } u(\rho, \alpha)\| = 0$

(jjj) la fonction  $(\rho, \alpha) \rightarrow \|\text{grad } u(\rho, \alpha)\|$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+ \times [0, \pi]$

Les fonctions  $u$  possédant les propriétés (j), (jj), (jjj) forment un espace vectoriel noté  $\mathcal{U}$ .

L'articulation de la suite de ce paragraphe est la suivante :

- on donne une condition suffisante d'existence de solution au problème  $A_2$ .
- on démontre l'unicité de la solution du problème  $B_2$ , si elle existe.
- on donne une condition suffisante d'existence de la solution du problème  $B_2$ .

### 3.b.1 conditions suffisantes d'existence de solution pour le problème $A_2$

Sous réserve que la fonction  $p(\cdot)$  soit *continue et bornée*, on a vu au paragraphe 2.b.1 que la fonction  $u$  définie en (17) vérifie l'équation (71) et est harmonique dans le demi-plan ouvert  $\Omega - \partial\Omega$ . C'est donc une solution du problème  $A_2$ .

### 3.b.2 unicité de la solution du problème $B_2$

On se propose de prouver l'unicité de la fonction  $u$ , si elle existe, égale à  $p(\cdot)$  sur  $\partial\Omega$ , harmonique dans  $\Omega - \partial\Omega$ , qui possède en outre les propriétés (j), (jj), (jjj). Il est suffisant de montrer que la fonction nulle est l'unique solution de ce problème lorsque  $p(\cdot)$  est elle-même identiquement nulle.

En intégrant la quantité  $u\Delta u$  dans le domaine  $D_\rho$  défini en 2.d, on obtient

$$\int_{D_\rho} u\Delta u \, d\Omega = - \int_{D_\rho} \text{grad } u \cdot \text{grad } u \, d\Omega + \int_{C_\rho} u(\text{grad } u \cdot \underline{n}) \, dl = 0 \quad (73)$$

Pour prouver que  $u=0$ , il suffit d'établir que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{C_\rho} u(\text{grad } u, \underline{n}) \, dl = 0 \quad (74)$$

On observe que

$$\int_{C_\rho} u(\text{grad } u, \underline{n}) \, dl = \int_0^\pi \rho u(\text{grad } u, \underline{n}) \, d\alpha \quad (75)$$

(74) résulte alors immédiatement du théorème de la convergence dominée qui s'applique grâce aux propriétés (j), (jj), (jjj).

### 3.b.3 conditions suffisantes d'existence de solution pour le problème $B_2$

On suppose que la fonction  $p(\cdot)$  possède les propriétés suivantes:

- (1)  $p(\cdot)$  est continue et bornée, 2 fois dérivable
- (2)  $p'(\cdot), p''(\cdot)$  sont bornées en valeur absolue
- (3) la fonction  $x \mapsto xp(x)$  est bornée en valeur absolue
- (4)  $p(\cdot)$  admet une primitive  $\mathcal{P}(\cdot)$  bornée

Avec ces hypothèses, on va montrer que la fonction  $u$  de (44) est la solution du problème  $B_2$ . Il suffit de voir qu'elle possède les propriétés (j), (jj), (jjj). On notera que les conditions (1) à (4) sont satisfaites, par exemple, pour toute fonction  $C^2$  à support compact.

*propriété (j)*

On considère en premier lieu la fonction  $(x, y) \rightarrow x u(x, y)$ . On observe que

$$\pi x u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x + \delta y) p(x + \delta y) \frac{d\delta}{1 + \delta^2} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta y p(x + \delta y) \frac{d\delta}{1 + \delta^2} \quad (76)$$

Il est immédiat que

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} (x + \delta y) p(x + \delta y) \frac{d\delta}{1 + \delta^2} \right| \leq \pi \sup_{x \in \mathbb{R}} |xp(x)| \quad (77)$$

Par ailleurs, une intégration par parties montre que:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \delta y p(x + \delta y) \frac{d\delta}{1 + \delta^2} \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(x + \delta y) \frac{1 - \delta^2}{(1 + \delta^2)^2} d\delta \right| \leq \pi \|\mathcal{P}\|_\infty \quad (78)$$

Il résulte des inégalités (77) et (78) que la quantité  $|x u(x,y)|$  est bornée sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$ . Il est facile de voir qu'il en est de même de  $|y u(x,y)|$ . En effet, une intégration par parties montre que:

$$|y u(x,y)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} y p(x+\delta y) \frac{d\delta}{1+\delta^2} \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(x+\delta y) \frac{2\delta d\delta}{(1+\delta^2)^2} \right| \leq 2 \|\mathcal{P}\|_{\infty} \quad (79)$$

Soit donc  $M$  un réel tel que

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^-) \begin{cases} |x \cdot u(x,y)| \leq M \\ |y \cdot u(x,y)| \leq M \end{cases} \quad (80)$$

Il est alors immédiat que

$$(\forall (\rho, \delta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, \pi]) \quad \rho |u(\rho, \alpha)| \leq M\sqrt{2} \quad (81)$$

Ceci achève de démontrer la propriété (j). On observera que la condition (3) est nécessaire pour parvenir à ce résultat.

*propriété (jj)*

Puisque la fonction  $p'(\cdot)$  est bornée en valeur absolue, il est licite d'échanger les opérateurs  $\int$  et  $\frac{\partial}{\partial x}$  dans (17). Il vient ainsi

$$\pi \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p'(x+\delta y) \frac{d\delta}{1+\delta^2} \quad (82)$$

L'identité homologue donnant  $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$ , c'est-à-dire

$$\pi \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p'(x+\delta y) \frac{\delta d\delta}{1+\delta^2} \quad (83)$$

est moins immédiate. C'est une conséquence de la règle d'Abel et du théorème n°3 de l'Annexe 2. Soit alors un réel  $y \neq 0$ . Une intégration par parties dans (82) et (83) montre que:

$$|\pi \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x+\delta y)}{y} \frac{2\delta d\delta}{(1+\delta^2)^2} \right| \leq 2 \|p\|_{\infty} / |y| \quad (84)$$

et

$$|\pi \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x+\delta y)}{y} \frac{1-\delta^2}{(1+\delta^2)^2} d\delta \right| \leq \pi \|p\|_{\infty} / |y| \quad (85)$$



En observant que  $y = -\rho \sin \alpha$ , la propriété (jj) résulte des inégalités (84) et (85).

propriété (jjj)

A partir de (82), il est facile de voir que  $|\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)|$  est bornée par  $\|p'\|_\infty$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$ . L'inégalité (85) prouve ensuite que  $|\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)|$  est bornée par un scalaire  $M_\beta$  sur tout domaine de la forme  $\mathbb{R} \times ]-\infty, \beta]$  si  $\beta < 0$ . Le travail consiste donc à prouver que cette quantité est également bornée sur le domaine  $\mathbb{R} \times [\beta, 0]$ .

Comme la fonction  $p''(\cdot)$  est bornée en valeur absolue, il est licite d'échanger dans (17) les opérateurs  $\int$  et  $\partial^2 / \partial^2 x$ :

$$|\pi \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x, y)| = |\int_{-\infty}^{+\infty} p''(x + \delta y) \frac{d\delta}{1 + \delta^2}| \leq \pi \|p''\|_\infty \quad (86)$$

Puisque la fonction  $u$  est harmonique dans  $\Omega - \partial\Omega$ , on voit que

$$(\forall y < 0) \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = - \int_\beta^y \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x, \tau) d\tau + \frac{\partial u}{\partial y}(x, \beta) \quad (87)$$

Soit encore, en utilisant (86) et (87)

$$(\forall y < 0) \quad |\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)| \leq |y - \beta| \pi \|p''\|_\infty + M_\beta \quad (88)$$

Il apparaît ainsi que  $|\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)|$  est également bornée dans  $\mathbb{R} \times [\beta, 0[$  et donc dans l'ouvert  $\Omega - \partial\Omega$ . Il reste encore à prouver que la fonction  $x \mapsto \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0)$  est définie et bornée sur  $\mathbb{R}$ . L'Annexe n°6 établit l'existence de  $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0)$  et l'égalité

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \pi \frac{u(x, y) - u(x, 0)}{y} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|X-x| > \varepsilon} \frac{p(x) - p(X)}{(X-x)^2} dX \quad (89)$$

On est donc ramené à montrer que

$$\sup_{x, \varepsilon} \left| \int_{|X-x| > \varepsilon} \frac{p(X) - p(x)}{(X-x)^2} dX \right| < \infty \quad (90)$$

En choisissant  $\varepsilon < 1$ , on a

$$\int_{|X-x|>\varepsilon} dX \frac{p(X)-p(x)}{(X-x)^2} = \int_{|X-x|>1} dX \frac{p(X)-p(x)}{(X-x)^2} + \int_{-1}^{-\varepsilon} du \frac{p(u+x)-p(x)}{u^2} + \int_{\varepsilon}^1 du \frac{p(u+x)-p(x)}{u^2} \quad (91)$$

La formule de Taylor-Lagrange appliquée à  $p$  permet d'affirmer que

$$(\forall u \in \mathbb{R})(\exists \theta \in [0, 1]) \frac{p(u+x)-p(x)}{u^2} = \frac{p'(x)}{u} + \frac{p''(x+\theta u)}{2} \quad (92)$$

En utilisant la relation (92) dans (91), il est facile de voir que

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad \left| \int_{|X-x|>\varepsilon} dX \frac{p(X)-p(x)}{(X-x)^2} \right| \leq 4\|p\|_{\infty} + \|p''\|_{\infty} \quad (93)$$

Ceci prouve l'inégalité de (90) et achève de démontrer la propriété (JJJ).

### 3.c le milieu poreux élastique

On revient maintenant au cas général où le squelette n'est plus rigide. On considère un champ de vecteurs  $\xi(x, y, t)$  et une fonction numérique  $u(x, y, t)$  possédant les propriétés de régularité définies au paragraphe 3.a. On définit les champs de tenseurs  $\underline{\hat{\sigma}}'$  et  $\underline{\hat{d}}$  à partir de  $\underline{U}$  au moyen des relations (67). On appelle *solution du problème  $A_3$*  tout couple  $(\xi, u)$  de telles fonctions pour lesquelles

$$\text{pour } t < 0 \quad \xi(x, y, t) = 0 ; u(x, y, t) = 0 \quad (94)$$

et, pour  $t > 0$  :

$$u|_{\partial\Omega} = p_t \quad (95)$$

$$\frac{k}{\gamma_w} \Delta u = \text{div} \underline{U} \quad (96)$$

$$\underline{\hat{\sigma}}'|_{\partial\Omega} \cdot \underline{j} = 0 \quad (97)$$

$$\text{div } \underline{\hat{\sigma}}' = \text{grad } \dot{u} \quad (98)$$

Si de plus, à chaque instant, les fonctions  $\underline{U}$  d'une part,  $u$  et  $\dot{u}$  d'autre part, sont éléments respectivement des espaces vectoriels  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{U}$  définis en 2.c et 3.b, le couple  $(\xi, u)$  est dit *solution du problème  $B_3$* . L'articulation du paragraphe est identique à celle du paragraphe

précédent.

### 3.c.1 Existence de solution pour le problème $A_3$

On va établir que le problème  $A_3$  admet une solution dès lors que la fonction  $p(.,t)$  est à chaque instant continue et bornée en valeur absolue.

On considère le problème  $A_1$  pour les valeurs  $\tilde{E}=E$  et  $\tilde{\nu}=\frac{1}{2}$  des paramètres de la loi élastique de (3). On note  $\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}$  le champ de contraintes défini par (9) avec  $\tilde{\nu}=\frac{1}{2}$  où l'on a remplacé  $p(.)$  par  $p(.,t)$ . On considère un champ de déplacements  $\tilde{\underline{\underline{\xi}}}$  associé à  $\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}$  par les relations

$$\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{1}{2}(\text{grad } \tilde{\underline{\underline{\xi}}} + {}^t\text{grad } \tilde{\underline{\underline{\xi}}}) \quad (99a)$$

$$\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{3}{2E}(\tilde{\underline{\underline{\sigma}}} - \frac{1}{3}\text{tr}(\tilde{\underline{\underline{\sigma}}})\underline{\underline{1}}) \quad (99b)$$

Un tel champ existe en effet d'après le paragraphe 2.b.1. En vertu de (66) et (9), le champ  $\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}$  est nul pour  $t \leq 0$ . Il est donc toujours possible de choisir  $\tilde{\underline{\underline{\xi}}}$  en sorte que  $\tilde{\underline{\underline{\xi}}}(x,y,0)=\underline{\underline{0}}$ . On note  $\underline{\underline{\sigma'}}$  la partie déviatorique de  $\underline{\underline{\sigma}}$ , c'est-à-dire

$$\underline{\underline{\sigma'}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3}\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{1}} \quad (100)$$

On note encore  $\tilde{\underline{\underline{d}}}$ , le taux de déformations associé à  $\tilde{\underline{\underline{\xi}}}$ . Enfin, on considère la fonction  $u$  définie par (17), où l'on a remplacé  $p(.)$  par  $p(.,t)$ . En vertu de (66) et (17), la fonction  $u$  est nulle pour  $t \leq 0$ . On se propose de démontrer que le couple  $(\frac{2}{3}(1+\nu)\tilde{\underline{\underline{\xi}}}, u)$  est une solution du problème  $A_3$ .

On observera qu'aucune signification physique ne saurait être attribuée, pour le moment, aux grandeurs  $\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}, \underline{\underline{\sigma'}}$  et  $u$ . Les problèmes dont  $\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}$  et  $u$  sont solutions sont en effet dépourvus de lien physique avec le problème présent.

On désigne par  $\underline{\underline{d}}$  le tenseur taux de déformations associé à  $\underline{\underline{U}}$ . Par définition de  $\underline{\underline{U}}$ , on a

$$\underline{\underline{d}} = \frac{2}{3}(1+\nu)\tilde{\underline{\underline{d}}} \quad (101)$$

En comparant (99b), (100) et (101), il vient

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma'}} \quad (102)$$

Comme la trace de  $\underline{\underline{\sigma'}}$  est nulle, la relation (102) est équivalente à (67b). Pour démontrer le résultat annoncé, il suffit donc d'établir les identités (94) à (98). On observe tout d'abord que les relations (94) sont satisfaites par construction. (99b) montre que le tenseur  $\underline{\underline{\xi}}$  est purement déviatorique. Il en est de même de  $\tilde{\underline{\underline{d}}}$  et l'on a  $\text{div} \underline{\underline{U}} = \text{tr}(\tilde{\underline{\underline{d}}}) = 0$ . Comme la fonction  $u$  est solution du problème  $A_2$ , les relations (95) et (96) sont donc vérifiées. Par ailleurs, à partir des relations (22) avec  $\nu = \frac{1}{2}$ , il est facile de voir que

$$\text{tr}(\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}) = -3u \quad (103)$$

De la définition (100) de  $\underline{\underline{\sigma'}}$  et de l'identité (103), on obtient

$$\underline{\underline{\sigma'}} = \tilde{\underline{\underline{\sigma}}} + u \underline{\underline{1}} \quad (104)$$

L'identité (97) résulte de (6), (95) et (104) et l'on établit (98) en utilisant (104) dans (5). Ceci achève de démontrer que le couple  $(\frac{2}{3}(1+\nu)\tilde{\underline{\underline{\xi}}}, u)$  est bien une solution du problème  $A_3$ .

En particulier, lorsque les intégrales  $\mathcal{J}(p)$  et  $\mathcal{L}(p)$  de (26) convergent, le couple formé par le champ  $\underline{\underline{\xi}}$  défini par

$$\underline{\underline{\xi}} = \frac{2}{3}(1+\nu) \int_{\mathbb{R}} p(X) \underline{\underline{\delta}}^X dX \quad (105)$$

et la fonction  $u$  de (17) constitue une solution explicite de ce problème.

### 3.c.2 Interprétation des résultats obtenus

Comme c'était le cas pour le problème  $A_1$ , on ne dispose pas d'argument d'unicité pour la solution du problème  $A_3$ . Néanmoins, à cette restriction près, il est intéressant de fournir une interprétation physique de la solution qui vient d'être présentée.

On constate en premier lieu que la fonction  $u$  de (17) représente aussi bien la pression du fluide dans le squelette rigide que dans le squelette élastique. Cette identité surprenante a priori résulte du fait que le champ de déplacements  $\xi$  de (105) n'implique aucune variation de volume dans le demi-espace. Vis-à-vis de la sollicitation définie par la fonction  $p(x,t)$ , celui-ci se déforme donc comme s'il était incompressible. Le tenseur  $\underline{\underline{\sigma'}}$  qui est associé à  $\xi$  par la loi de comportement (67b) s'interprète comme le tenseur des contraintes effectives.

La deuxième remarque porte sur la signification physique du champ de contraintes  $\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}$ . On rappelle que ce dernier, introduit au paragraphe 3.c.1, représente, à l'instant  $t$ , un champ de contraintes dans un demi-espace *monophasique* élastique incompressible soumis à la pression  $x \rightarrow p(.,t)$ . La relation (104) livre une nouvelle interprétation physique du tenseur  $\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}$ . En comparant (104) avec (1), ce dernier apparaît en effet comme le *tenseur des contraintes totales* dans le problème du massif *biphasique*. Ce résultat est indépendant de la valeur prise par le coefficient de Poisson du squelette. Les relations (22) utilisées avec  $\tilde{\nu} = \frac{1}{2}$  permettent d'exploiter cette identité. Elles fournissent en particulier la représentation matricielle du tenseur  $\underline{\underline{\sigma'}}$  dans la base  $(\underline{\underline{i}}, \underline{\underline{j}})$  :

$$\underline{\underline{\sigma'}} = \gamma \begin{pmatrix} -\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (106)$$

Il est intéressant d'observer que le tenseur  $\underline{\underline{\sigma'}}$  est nul à la frontière du demi-espace. En conséquence, l'état de contraintes totales au voisinage d'un point de la frontière et d'abscisse  $x$ , est au premier ordre en  $y$  près purement sphérique et égal à  $-p(x,t)\underline{\underline{I}}$ .

### 3.c.3 unicité de la solution du problème $B_3$

Pour établir l'unicité de la solution du problème  $B_3$ , il est suffisant

de montrer que le couple  $(\xi=0, u=0)$  est l'unique solution de ce problème lorsque la fonction  $(x, t) \rightarrow p(x, t)$  est identiquement nulle.

On intègre dans le domaine  $D_\rho$  introduit au paragraphe 2.d, les quantités  $\underline{U} \cdot \text{div } \underline{\dot{\phi}}'$  et  $\underline{U} \cdot \text{grad } \dot{u}$ , qui sont égales en vertu de (98). En tenant compte de (67), une intégration par parties fournit

$$-\int_{D_\rho} \underline{d} : A : \underline{d} \, d\Omega + \int_{C_\rho} \underline{U} \cdot \underline{\dot{\phi}}' \cdot \underline{n} \, dl = -\int_{D_\rho} \dot{u} \, \text{div} \underline{U} \, d\Omega + \int_{C_\rho} \dot{u} \, \underline{n} \cdot \underline{U} \, dl \quad (107)$$

De même, on intègre dans  $D_\rho$  les quantités  $k/\gamma_w \dot{u} \Delta u$  et  $\dot{u} \, \text{div} \underline{U}$ , égales d'après (96), il vient

$$-\int_{D_\rho} \dot{u} \, \text{div} \underline{U} \, d\Omega = \frac{k}{\gamma_w} \left\{ \int_{D_\rho} \text{grad } \dot{u} \cdot \text{grad } u \, d\Omega - \int_{C_\rho} \dot{u} \underline{n} \cdot \text{grad } u \, dl \right\} \quad (108)$$

En associant (107) et (108), il vient

$$\frac{k}{\gamma_w} \int_{D_\rho} \text{grad } \dot{u} \cdot \text{grad } u \, d\Omega = -\int_{D_\rho} \underline{d} : A : \underline{d} \, d\Omega + \int_{C_\rho} \underline{U} \cdot \underline{\dot{\phi}}' \cdot \underline{n} \, dl - \int_{C_\rho} \dot{u} \underline{n} \cdot \underline{U} \, dl + \frac{k}{\gamma_w} \int_{C_\rho} \dot{u} \underline{n} \cdot \text{grad } u \, dl \quad (109)$$

Par définition du problème  $B_3$ ,  $u$  et  $\dot{u}$  sont à chaque instant éléments de  $\mathcal{U}$ . Le théorème de la convergence dominée montre alors que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{C_\rho} \dot{u} \underline{n} \cdot \text{grad } u \, dl = 0 \quad (110)$$

En observant que  $\underline{U}$  est élément de  $\mathcal{E}$ , le même théorème montre encore que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{C_\rho} \underline{U} \cdot \underline{\dot{\phi}}' \cdot \underline{n} \, dl = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{C_\rho} \dot{u} \underline{n} \cdot \underline{U} \, dl = 0 \quad (111)$$

Si la fonction  $\xi$  est identiquement nulle, alors la fonction  $u$  est solution du problème  $B_2$  pour  $p=0$ . Elle est donc elle-même nulle. Pour prouver le résultat annoncé, il est donc suffisant de prouver que  $\xi=0$ . On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un triplet  $(x, y, t)$  pour lequel  $\xi(x, y, t) \neq 0$ . On définit de plus un réel  $\tau$  par

$$\tau = \inf \{ t \in \mathbb{R}, (\exists M \in \Omega) \underline{d}(M, t) \neq 0 \} \quad (112)$$

qui existe puisque l'ensemble  $\{t \in \mathbb{R}, (\exists M \in \Omega) \underline{d}(M, t) \neq 0\}$  est minoré par 0. Comme le champ  $M \rightarrow \underline{d}(M, t)$  est continu dans  $\Omega$ , et que la quantité  $\underline{d}: A: \underline{d}$  est positive, on peut alors affirmer que

$$(\exists \varepsilon > 0)(\exists R > 0) \rho > R \Rightarrow \int_{D_\rho} \underline{d}(M, \tau): A: \underline{d}(M, \tau) d\Omega > \varepsilon \quad (113)$$

La propriété suivante, pour  $t = \tau$ , résulte des identités (111) et (112):

$$(\exists R' > 0) \rho > R' \Rightarrow \frac{k}{\gamma_w} \left| \int_{C_\rho} \underline{\dot{u}} \cdot \underline{\text{grad}} u d\Omega \right| + \left| \int_{C_\rho} \underline{U} \cdot \underline{\dot{g}}' \cdot \underline{n} d\Omega \right| + \left| \int_{C_\rho} \underline{\dot{u}} \cdot \underline{n} \cdot \underline{U} d\Omega \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (114)$$

En associant (109), (113) et (114), on voit que

$$\rho > \sup(R, R') \Rightarrow \frac{k}{\gamma_w} \int_{D_\rho} \underline{\text{grad}} \underline{\dot{u}}(M, \tau) \cdot \underline{\text{grad}} u(M, \tau) d\Omega < -\frac{\varepsilon}{2} \quad (115)$$

On introduit maintenant la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  par

$$f(\rho, t) = \frac{k}{2\gamma_w} \int_{D_\rho} \|\underline{\text{grad}} u\|^2 d\Omega \quad (116)$$

La fonction  $f$  est donc positive ou nulle. De plus, par définition de  $\tau$ , on a

$$(\forall t \leq \tau)(\forall \rho \in \mathbb{R}^+) f(\rho, t) = 0 \quad (117)$$

La fonction  $(\rho, \alpha, t) \rightarrow \underline{\text{grad}} \underline{\dot{u}}(\rho, \alpha, t) \cdot \underline{\text{grad}} u(\rho, \alpha, t)$  étant continue, et le domaine  $D_\rho$  étant borné, la fonction  $f$  est continûment dérivable par rapport à  $t$  et l'on peut échanger les opérateurs  $\int$  et  $\frac{\partial}{\partial t}$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\rho, t) = \frac{k}{\gamma_w} \int_{D_\rho} \underline{\text{grad}} \underline{\dot{u}} \cdot \underline{\text{grad}} u d\Omega \quad (118)$$

De la continuité de  $\frac{\partial f}{\partial t}(\rho, t)$  et des propositions (115), (117) et (118), il résulte l'existence d'un réel  $\beta > 0$  tel que la fonction  $f$  soit strictement négative pour  $\rho > \sup(R, R')$  et  $t \in ]\tau, \tau + \beta[$ . Ceci est en contradiction avec la définition donnée en (116) de cette fonction et achève la démonstration de l'unicité annoncée de la solution du problème  $B_3$ .

### 3.c.4 Existence d'une solution au problème $B_3$

On va identifier des conditions suffisantes à vérifier par la fonction  $(x,t) \rightarrow p(x,t)$  pour que le couple formé par le champ  $\xi$  de (105) et la fonction  $u$  de (17) soit solution du problème  $B_3$ . Sous réserve que les intégrales de (26) convergent, on a vu que ce couple est solution de  $A_3$ . Il s'agit d'assurer de plus qu'à chaque instant  $U \in \mathcal{E}$  et  $(u, \dot{u}) \in \mathcal{U}^2$ .

Pour pouvoir calculer  $U$  à partir de  $\xi$  et  $\dot{u}$  à partir de  $u$  en échangeant les opérateurs  $\frac{\partial}{\partial t}$  et  $\int$ , on fait l'hypothèse suivante qui permet d'appliquer le théorème n°8 : pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , il existe un voisinage de  $t$  et une fonction  $g$  telle que  $\mathcal{L}(g)$  converge et que

$$(\forall X \in \mathbb{R})(\forall t \in V) \left| \frac{\partial p}{\partial t}(X, t) \right| < g(X) \quad (119)$$

Le champ  $\xi$  est alors dérivable et sa dérivée  $U$  est obtenue en remplaçant  $p(X, t)$  par  $\frac{\partial p}{\partial t}(X, t)$  dans (105). Le travail effectué au paragraphe 2.f permet maintenant de donner un jeu de conditions sur la fonction  $\dot{p}_t : x \rightarrow \frac{\partial p}{\partial t}(X, t)$  assurant que le champ  $(x, y) \rightarrow \underline{U}(x, y, t)$  soit élément de  $\mathcal{E}$ :

- (1) la fonction  $\dot{p}_t$  est continue et bornée
- (2) la fonction  $x \rightarrow x \dot{p}_t(x)$  est bornée en valeur absolue
- (3) l'intégrale  $\mathcal{L}(\dot{p}_t)$  est absolument convergente
- (4) l'intégrale  $\mathcal{J}(\dot{p}_t)$  est nulle

De façon analogue, si les fonctions  $p_t : x \rightarrow p(x, t)$  et  $\dot{p}_t$  possèdent les propriétés (1) à (4) du paragraphe 3.b.3, alors les champs  $(x, y) \rightarrow u(x, y, t)$  et  $(x, y) \rightarrow \dot{u}(x, y, t)$  sont éléments de  $\mathcal{U}$ .

Sous réserve de l'ensemble de ces hypothèses, on est assuré que le couple  $(\xi, u)$  forme l'unique solution du problème  $B_3$ .

Le jeu de conditions à vérifier par la fonction  $p$  peut paraître restrictif. En fait, si l'on excepte la condition de "résultante



nulle", c'est-à-dire  $\mathcal{J}(\dot{p}_t)=0$ , toutes les autres conditions sont satisfaites par exemple si les fonction  $p_t$  sont de classe  $C^2$  à support compact dans  $\mathbb{R}$ . Cette observation souligne l'importance de cette condition de résultante nulle, dont on a vu l'origine au paragraphe 2.e.

### 3.c.5 Application au cas de la houle linéaire

On observe tout d'abord que le problème  $B_3$  n'a pas de solution pour la houle linéaire, c'est-à-dire lorsque la pression sur le plan  $y=0$  est définie par

$$p(x, t) = p_0 \sin(kx - \omega t) \quad (120)$$

En revanche, une solution du problème  $A_3$  a été donnée par Madsen (1978). Cet auteur recherche a priori toute grandeur physique du problème en séparant les variables  $x$  et  $y$  sous la forme  $f(y)\sin(kx - \omega t)$  et résoud alors explicitement le problème en déplacements et pression interstitielle avec l'hypothèse que ces quantités tendent vers 0 lorsque la distance du point considéré au plan  $y=0$  tend vers l'infini. Les développements précédents vont permettre de retrouver beaucoup plus vite son résultat.

On recherche donc un couple  $(\xi, u)$  solution du problème  $A_3$  défini par la fonction  $p$  de (120).  $\xi$  représente un champ de déplacements du squelette et  $u$  un champ de pressions interstitielle compatible avec  $\xi$ . Pour identifier un tel couple, on s'appuie sur les résultats du paragraphe 3.c.1.

La fonction  $u$  de (17) a déjà été identifiée au paragraphe 2.g :

$$u(x, y, t) = p_0 e^{ky} \sin(kx - \omega t) \quad (121)$$

Ce champ représente, à l'unicité près, les pressions interstitielles dans le massif. L'expression du champ  $\tilde{\sigma}$  résulte immédiatement de l'équation (64) du paragraphe 2.g, avec  $\tilde{\nu} = \frac{1}{2}$  :

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{xx} &= -p_o e^{ky} \sin(kx - \omega t) (1 + ky) \\
\tilde{\sigma}_{yy} &= -p_o e^{ky} \sin(kx - \omega t) (1 - ky) \\
\tilde{\sigma}_{xy} &= +p_o e^{ky} \cos(kx - \omega t) (ky) \\
\tilde{\sigma}_{zz} &= -p_o e^{ky} \sin(kx - \omega t)
\end{aligned} \tag{122}$$

Ce champ représente, à l'unicité près, le champ de contraintes totales dans le massif. Le champ  $\xi$  recherché est obtenu en multipliant le champ  $\tilde{\xi}$  de l'équation (65) où  $\tilde{\nu} = \frac{1}{2}$  par  $\frac{2}{3}(1 + \nu)$  :

$$\begin{aligned}
\xi_x &= p_o \frac{1 + \nu}{E} \frac{e^{ky} \cos kx - \omega t}{k} ky \\
\xi_y &= -p_o \frac{1 + \nu}{E} \frac{e^{ky} \sin kx - \omega t}{k} (1 - ky) \\
\xi_z &= 0
\end{aligned} \tag{123}$$

La solution  $(\xi, u)$  définie par les équations (121) et (123) coïncident avec celle donnée par Madsen.

### 3.c.6 Extension à un massif hétérogène

L'existence d'une solution au problème poroélastique  $A_3$  a été établie au paragraphe 3.c.1 sous réserve que la fonction  $p(., t)$  soit à chaque instant continue et bornée sur  $\mathbb{R}$ . Sous ces hypothèses, une solution en contraintes effectives et pression interstitielle a été explicitée : elle est définie par le champ de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}'$  de (106) et la pression interstitielle  $u$  donnée en (17). On se propose d'étendre ce résultat au problème poroélastique obtenu quand le module d'Young est une fonction linéaire de l'ordonnée  $y$ , le coefficient de Poisson  $\nu$  restant une constante. La démarche est celle de la méthode des contraintes. Pour démontrer que les champs  $\underline{\underline{\sigma}}'$  de (106) et  $u$  de (17) représentent respectivement les contraintes effectives et la pression interstitielle (à l'unicité près) dans le problème hétérogène, il suffit de vérifier la compatibilité géométrique du champ de déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  donné dans la base  $(\underline{\underline{i}}, \underline{\underline{j}})$  par

$$2\mu \underline{\underline{\epsilon}} = y \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (124)$$

Le module de cisaillement  $\mu$  est une fonction linéaire de la profondeur. Il faut donc s'assurer que :

$$\underline{\underline{\text{rot}}}^d(\underline{\underline{\text{rot}}}^g \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(\underline{\underline{101}} + \underline{\underline{101}}) + \frac{\partial u}{\partial y}(\underline{\underline{101}} - \underline{\underline{101}}) \right]) = \underline{\underline{0}} \quad (125)$$

Cette identité résulte immédiatement du fait que la fonction  $u$  est harmonique et achève d'établir le résultat annoncé. Il sera utile au chapitre IV.

#### 4 - CONCLUSION

Ce chapitre a proposé une étude de l'action d'un champ de pression plan s'exerçant à la frontière d'un demi-espace élastique ou poroélastique. Il s'agissait d'exhiber des solutions aux équations de champ et des conditions aux limites en surface, et ensuite, au delà de l'existence de telles solutions, de se préoccuper de la question mathématique de leur unicité. L'étude de l'existence de solutions a été menée avec le souhait de généraliser à des champs de pression de forme quelconque les résultats déjà disponibles dans le cas de la houle linéaire. Pour le problème du demi-espace élastique monophasique, on s'est attaché à dégager les hypothèses minimales rendant licites les opérations de superposition de solutions élémentaires du problème de Boussinesq, en contraintes et en déplacements. Pour le problème moins classique du demi-espace poroélastique, on a mis en évidence l'absence de couplage entre le fluide et le squelette pour le type de sollicitation étudiée. En particulier, on a souligné l'identité, à chargement identique, entre les contraintes totales dans un massif poroélastique et les contraintes dans un massif élastique monophasique incompressible.

L'autre propos de ce chapitre était d'examiner s'il était possible de prescrire le comportement à l'infini des solutions des équations de champ et des conditions aux limites de surface en les assujettissant (schématiquement) à "tendre vers 0 à l'infini". On a d'abord établi que de telles solutions ne pouvaient exister lorsque la résultante des pressions de surface était non nulle. Puis, cette prescription du comportement à l'infini des solutions a permis de dégager des résultats d'unicité. En particulier, le théorème classique énoncé par Muskhelishvili pour le demi-espace élastique monophasique a été généralisé au cas du massif poroélastique.

Au delà du fait que l'on dispose désormais, dans certaines conditions, de solutions à un problème élastique ou poroélastique, les champs de

contraintes construits dans ce chapitre seront utilisés dans les calculs de stabilité au chapitre III. Ils permettront de plus la définition d'un problème de stabilité en contraintes effectives qui sera étudié au chapitre IV.

## ANNEXE 1 - Charge linéique sur un demi-espace élastique

On étudie la répartition des contraintes dans le demi-espace élastique non pesant sous l'action d'une charge linéique unité verticale distribuée uniformément sur l'axe Oz. On traite le problème en déformations planes et l'on introduit un système de coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  dans le plan Oxy, comme indiqué à la figure A1.1 ( $\theta = \alpha - \pi/2$ , par rapport aux notations du corps du texte et de la figure 1 du Chapitre II).

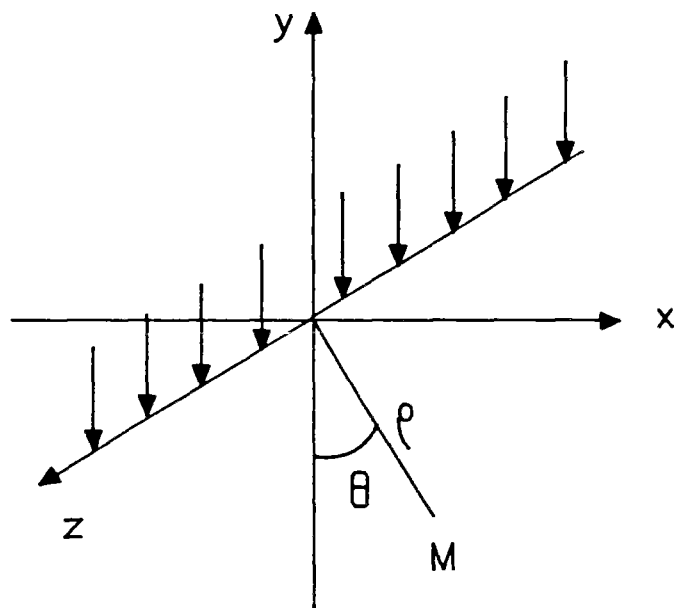


figure A1.1 : schéma de principe

On suppose a priori que les directions radiales et orthoradiales sont principales pour le tenseur des contraintes en tout point du demi-espace. L'équation  $\text{div} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}}$  s'exprime alors en fonction des composantes de  $\underline{\underline{\sigma}}$  sous la forme simplifiée suivante :

$$\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\theta\theta}}{\rho} = 0 \quad (a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad (b) \quad (A1.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (c)$$

L'hypothèse des déformations planes impose que :

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{\rho\rho} + \sigma_{\theta\theta}) \quad (A1.2)$$

Si l'on recherche  $\sigma_{\rho\rho}$  et  $\sigma_{\theta\theta}$  sous la forme de fonctions des seuls arguments  $\rho$  et  $\theta$ , la condition A1.1c est satisfaite. L'équation A1.2b exprime que  $\sigma_{\theta\theta}$  dépend du seul argument  $\rho$ . En observant que les conditions aux limites en surface à vérifier par  $\sigma_{\theta\theta}$  s'écrivent :

$$\forall \rho \neq 0 \quad \sigma_{\theta\theta}(\rho, \pm \frac{\pi}{2}) = 0 \quad (A1.3)$$

on déduit que  $\sigma_{\theta\theta}$  est identiquement nul. Il résulte alors de A1.1a, et A1.2 que :

$$\sigma_{\rho\rho} = \frac{a(\theta)}{\rho} \quad (A1.4)$$

$$\sigma_{zz} = \nu \frac{a(\theta)}{\rho}$$

d'où, par (II.6) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\rho\rho}(\rho, \theta) &= \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{a(\theta)}{\rho} \\ \varepsilon_{\theta\theta}(\rho, \theta) &= -\frac{\nu(1+\nu)}{E} \cdot \frac{a(\theta)}{\rho} \end{aligned} \quad (A1.5)$$

toutes les autres composantes des champs  $\underline{\sigma}$  et  $\underline{\varepsilon}$  étant nulles. La condition de compatibilité géométrique du champ  $\underline{\varepsilon}$  est satisfaite si et seulement si la fonction  $a(.)$  est solution de l'équation différentielle :

$$a'' + a = 0 \quad (A1.6)$$

soit :

$$a(\theta) = A \cos(\theta - \theta_0) \quad (A1.7)$$

Les constantes  $A$  et  $\theta_0$  sont déterminées en écrivant l'équilibre d'un demi-cylindre d'axe  $Oz$ , de rayon  $\rho$  et de longueur d'unité, sous l'action de la force  $-1$  et des contraintes s'exerçant sur sa frontière (voir figure A1.2).

Les projections verticale et horizontale de la résultante de ces efforts étant nulles, il vient :

$$1 + \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} A \cdot \frac{\cos(\theta - \theta_0)}{\rho} \cdot \rho \cos \theta d\theta = 0 \quad (A1.8)$$

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} A \cdot \frac{\cos(\theta - \theta_0)}{\rho} \cdot \rho \sin \theta d\theta = 0$$

soit

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\pi}{2} A \cos \theta_0 &= 0 \\ A \sin \theta_0 &= 0 \end{aligned} \quad (A1.9)$$

qui donne finalement :

$$A = -\frac{2}{\pi} ; \quad \theta_0 = 0 \quad (A1.10)$$

Par ce procédé, un champ de contrainte équilibrant la charge linéique unité associé par la loi de comportement élastique à un champ de déformation compatible géométriquement a pu être déterminé. En intégrant les équations (A1.5) donnant les composantes non nulles du champ de déformations, on obtient les composantes  $u$  et  $v$  en coordonnées polaires du déplacement  $\underline{\delta}$ , à un champ rigidifiant près :



$$\begin{aligned}
\delta_{\rho} &= A \cos \theta \ln(\rho) + \frac{A+B}{2} \theta \sin \theta \\
\delta_{\theta} &= B \sin \theta - A \sin \theta \ln(\rho) + \frac{A+B}{2} (\theta \cos \theta - \sin \theta) \\
\delta_z &= 0
\end{aligned} \tag{A1.11}$$

où l'on a posé :

$$A = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1-\nu^2}{E} ; \quad B = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\nu(1+\nu)}{E} \tag{A1.12}$$

La présence d'un terme en  $\ln \rho$  dans l'expression de  $\delta_{\rho}$  et  $\delta_{\theta}$  indique qu'il n'est pas possible de trouver un champ rigidifiant tel que les déplacements dans le massif restent finis lorsque  $\rho \rightarrow +\infty$ . Pour cette raison, en surperposant à  $\underline{\delta}$  un champ rigidifiant quelconque on obtient une nouvelle solution du même problème, c'est-à-dire vérifiant les mêmes conditions aux limites en contraintes et déplacements.

On déduit de ce qui précède les composantes de  $\underline{\sigma}$  et  $\underline{\delta}$  en coordonnées cartésiennes. Pour le champ de contraintes, on a :

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= -\frac{2}{\pi} \frac{\cos \theta \cdot \sin^2 \theta}{\rho} \\
\sigma_{yy} &= -\frac{2}{\pi} \frac{\cos^3 \theta}{\rho} \\
\sigma_{xy} &= \frac{2}{\pi} \frac{\cos^2 \theta \cdot \sin \theta}{\rho} \\
\sigma_{zz} &= -\frac{2}{\pi} \nu \frac{\cos \theta}{\rho}
\end{aligned} \tag{A1.13}$$

et  $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ . Pour le champ de déplacements :

$$\begin{aligned}
\delta_x &= \frac{A+B}{2} \theta - \frac{A-B}{2} \sin \theta \cos \theta \\
\delta_y &= -A \ln \rho - \frac{A-B}{2} \sin^2 \theta \\
\delta_z &= 0
\end{aligned} \tag{A1.14}$$

Il convient d'observer que le champ de déplacements  $\underline{\delta}$  tend vers l'infini au voisinage du point d'application de la charge. En conséquence, l'hypothèse des petites perturbations n'est plus

justifiée. Ceci est dû naturellement à la notion même de charge concentrée. Dans ces conditions, il faut se garder d'attribuer un sens physique aux contraintes et déplacements qui viennent d'être déterminés. Il paraît préférable de les considérer comme les solutions du problème différentiel défini par les équations du problème élastique en petites perturbations.

## ANNEXE 2 - Rappels de résultats des théories de l'intégration

Cette annexe rappelle quelques définitions et théorèmes classiques de la théorie des intégrales de Riemann généralisées et de la théorie de Lebesgue. Elle n'a d'autre objectif que de préciser la terminologie employée dans le corps du texte.

*Définition n°1* : soient  $[a, b[$  un intervalle semi-ouvert de  $\mathbb{R}$  ( $b$  éventuellement infini) et  $X$  un ensemble quelconque. Soit de plus une fonction numérique définie sur  $[a, b[ \times X$  telle que l'intégrale

$$\int_a^b f(t, x) dt$$

soit convergente pour toute valeur de  $x \in X$ . On dit que cette intégrale converge uniformément sur  $X$  si :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \beta > 0)(\forall x \in X) \quad u \in ]\beta, b[ \Rightarrow \left| \int_u^b f(t, x) dt \right| < \varepsilon$$

*Définition n°2* : considérant une fonction numérique  $f$  définie sur le produit  $]a, b[ \times X$  d'un intervalle ouvert avec un ensemble  $X$  quelconque, on dit que l'intégrale

$$\int_a^b f(t, x) dt$$

est normalement convergente sur  $X$  s'il existe une fonction  $\varphi$  localement intégrable sur  $]a, b[$  et telle que :

$$- (\forall t \in ]a, b[)(\forall x \in X) \quad |f(t, x)| \leq \varphi(t)$$

$$- \text{l'intégrale } \int_a^b \varphi(t) dt \text{ converge}$$

On vérifie alors immédiatement le résultat suivant, qui justifie la terminologie employée :

*Théorème n°1* : pour que l'intégrale

$$\int_a^b f(t, x) dt$$

soit uniformément convergente sur  $X$ , il suffit qu'elle soit normalement convergente.

Les intégrales généralisées convergeant uniformément par rapport à un paramètre présentent des propriétés de continuité et de dérivabilité par rapport à ce paramètre.

*Théorème n°2* : soient  $[a, b[$  un intervalle ouvert ( $a$  réel donné,  $b$  éventuellement infini) et  $X$  un intervalle quelconque de  $\mathbb{R}$ . Soit de plus une fonction numérique  $f$  continue sur  $[a, b[ \times X$  telle que l'intégrale

$$\int_a^b f(t, x) dt$$

soit uniformément convergente sur  $X$ . Alors la fonction  $F$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$F(x) = \int_a^b f(t, x) dt$$

est continue.

*théorème n°3* : soit  $f(t, x)$  une fonction numérique continue sur le domaine  $\Delta = [a, b[ \times ]\alpha, \beta[$  ( $b, \alpha, \beta$  étant éventuellement infinis) On suppose que :

- $f$  admet une dérivée  $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$  continue sur  $\Delta$
- $(\forall x \in ]\alpha, \beta[) \int_a^b f(t, x) dt$  est convergente
- $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dt$  converge uniformément sur  $]\alpha, \beta[$

Alors la fonction  $F$  définie sur  $]\alpha, \beta[$  par:

$$F(x) = \int_a^b f(t, x) dt$$

est dérivable et l'on a

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dt$$

*Théorème n°4* : Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions numériques localement intégrables sur l'intervalle ouvert  $]a, b[$ , telles que les intégrales

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt$$

soient uniformément convergentes. On suppose de plus que la suite  $(f_n)$  converge simplement vers une fonction  $f$  sur  $]a, b[$ , et que la convergence est uniforme sur tout compact  $[u, v] \subset ]a, b[$ . Alors la fonction  $f$  est localement intégrable dans  $]a, b[$ , l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$$

converge et l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = I$$

Le résultat suivant connu sous le nom de *Règle d'Abel* donne une condition suffisante de convergence uniforme pour certains types d'intégrales.

*Théorème n°5* : Soient  $X$  une partie de  $\mathbb{R}$  et  $f$  et  $g$  2 fonctions numériques définies sur  $\mathbb{R} \times X$ , telles que les fonctions  $t \mapsto f(t, x)$  et  $t \mapsto g(t, x)$  soient localement intégrables sur  $\mathbb{R}$ . On suppose de plus que :

- la fonction  $t \mapsto g(t, x)$  est positive, décroissante, et tend vers 0 quand  $t \rightarrow \infty$ , uniformément par rapport à  $x$  dans  $X$ .

$$-(\exists k \in \mathbb{R})(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2)(\forall x \in X) \left| \int_a^b f(t, x) dt \right| \leq k$$

Alors l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x) g(t, x) dt$$

converge uniformément par rapport à  $x$  dans  $X$ .

La théorie de l'intégration de Lebesgue fournit quelques résultats très puissants dont il est fait abondamment usage dans le corps du texte. On note  $L^1(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions intégrables au sens de Lebesgue. On a tout d'abord le théorème suivant qui fait le lien avec la théorie des intégrales généralisées.

*Théorème n°6* : Les intégrales de Riemann généralisées absolument convergentes sont des intégrales de Lebesgue.

Puis on a le résultat essentiel suivant connu sous le nom de théorème de la convergence dominée.

*Théorème n°7* : Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions convergeant simplement presque partout dans  $\mathbb{R}$  vers la fonction  $f$ . On suppose de plus qu'il existe une fonction  $g \in L^1(\mathbb{R})$  telle que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) |f_n(x)| \leq g(x)$$

alors

$$\int f_n(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

Le théorème suivant de dérivation sous le signe  $\int$  en résulte :

*Théorème n°8* : soit  $(t, x) \rightarrow f(t, x)$  une fonction numérique définie sur un domaine de la forme  $\mathbb{R} \times ]a, b[$ . On suppose que la dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$  est définie sur un sous domaine  $\mathbb{R} \times ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$  et qu'il existe une fonction  $g \in L^1(\mathbb{R})$  vérifiant :

$$(\forall t \in \mathbb{R}) (\forall x \in ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[) \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq g(t)$$

On suppose enfin que la fonction  $t \rightarrow f(t, x)$  est intégrable ( $\in L^1(\mathbb{R})$ ) pour tout  $x \in ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ . Alors la fonction  $x \rightarrow \int f(t, x) dt$  est dérivable et l'on a :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \int f(t, x) dt \right) = \int \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt$$

### ANNEXE 3 - Calcul des dérivées de u

L'existence d'une primitive  $\wp(.)$  de la fonction  $p(.)$  est assurée par le fait que cette dernière est supposée continue. En intégrant par parties dans (II.17), il vient :

$$\pi u(x, y) = \frac{1}{y} \int_{-\infty}^{+\infty} \wp(x + \alpha y) \frac{2\alpha d\alpha}{(1 + \alpha^2)^2} \quad (1)$$

En dérivant formellement sous le signe  $\int$  dans l'intégrale de (1), il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\wp(x + \alpha y)}{y} \cdot \frac{2\alpha d\alpha}{(1 + \alpha^2)^2} \quad (2)$$

La fonction  $|p(.)|$  étant bornée sur  $\mathbb{R}$ , l'intégrale de (2) est normalement convergente et donc uniformément convergente sur tout domaine de la forme  $\mathbb{R}x] -\infty, A]$  pour tout réel  $A < 0$ . La fonction  $u(x, y)$  admet donc une dérivée partielle par rapport à  $x$  dans le domaine  $\mathbb{R}x\mathbb{R}_*^-$ . On a donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\wp(x + \alpha y)}{y} \cdot \frac{2\alpha d\alpha}{(1 + \alpha^2)^2} \quad (3)$$

En intégrant de nouveau par parties dans (3), il vient

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-2}{\pi y} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\wp(x + \alpha y)}{y} \cdot \frac{1 - 3\alpha^2}{(1 + \alpha^2)^3} d\alpha \quad (4)$$

Avec les mêmes arguments que précédemment, il vient dans  $\mathbb{R}x\mathbb{R}_*^-$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-2}{\pi y^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \wp(x + \alpha y) \cdot \frac{1 - 3\alpha^2}{(1 + \alpha^2)^3} d\alpha \quad (5)$$

De manière analogue, on montre la validité dans  $\mathbb{R}x\mathbb{R}_*^-$  des relations suivantes :

$$\pi \frac{\partial u}{\partial y} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\wp(x + \alpha y)}{y} \cdot \frac{\alpha^2 - 1}{(1 + \alpha^2)^3} d\alpha \quad (6)$$

puis, en intégrant par parties :

$$\pi \frac{\partial u}{\partial y} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\wp(x + \alpha y)}{y^2} \cdot \frac{-2\alpha^3 + 6\alpha}{(1 + \alpha^2)^3} d\alpha \quad (7)$$

En utilisant (6) et (7), il est alors facile de vérifier que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (8)$$

qui exprime que  $u$  est harmonique dans le domaine ouvert  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^-$ . On prendra garde que des propriétés de dérivabilité de  $u$  aux points de la frontière  $\partial\Omega$  ne sauraient être assurées en dehors d'hypothèses supplémentaires à vérifier par  $p(\cdot)$ . Par ailleurs, on observera que le procédé qui a permis de démontrer l'existence des dérivées précédentes de  $u$  est généralisable sans difficulté à toute autre dérivée de cette fonction qui est donc en fait  $C^\infty$  sur l'ouvert  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^-$ . L'esprit des calculs précédents permet également de prouver l'existence de toute dérivée partielle des composantes  $\sigma_{ij}$  du tenseur  $\underline{\underline{\sigma}}$  défini en (II.9) et les déterminer.



#### ANNEXE 4 - ETUDE DE $\xi$

Cette Annexe comporte 3 parties se rapportant successivement à l'existence et à la continuité, puis à la dérivabilité de  $\xi$  et enfin aux conditions aux limites satisfaites par ce champ.

##### EXISTENCE ET CONTINUITE DE $\xi$

Il s'agit de montrer que la convergence des intégrales de (II.26) est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de  $\xi$  défini dans  $\Omega$  par (24) et (25) et qui assure de plus la continuité de ce champ.

En premier lieu, il est facile de voir que l'existence de  $\xi$  dans  $\Omega$  impose la convergence de  $\mathcal{L}(p)$  et  $\mathcal{J}(p)$ . Il suffit pour cela d'examiner l'expression de  $\xi_y$  pour  $x=0$  et  $y=-1$ , et celle de  $\xi_y$  pour  $x=0$  et  $y=0$ . On a en effet, d'après (24) et (25) :

$$\text{pour } x=0 \text{ et } y=-1 : \xi_y = -4 \cdot \mathcal{L}(p) - \frac{4-B}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} p(X) \frac{X^2}{X^2+Y^2} dX \quad (1)$$

$$\text{pour } x=0 \text{ et } y=0 : \xi_y = -24 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} p(X) \ln|X| dX - \frac{4-B}{2} \cdot \mathcal{J}(p)$$

Il reste à prouver la réciproque. Il sera utile pour la suite d'observer que si  $\mathcal{J}(p)$  et  $\mathcal{L}(p)$  convergent, alors les intégrales  $\mathcal{J}(p^x)$  et  $\mathcal{L}(p^x)$  convergent uniformément par rapport à  $x$  dans toute partie bornée de  $\mathbb{R}$ , la fonction  $p^x(\cdot)$  étant définie à partir de  $p(\cdot)$  par

$$(\forall X \in \mathbb{R}) \quad p^x(X) = p(X-x) \quad (2)$$

La vérification de cette propriété est immédiate pour  $\mathcal{J}(p^x)$ . La démonstration pour  $\mathcal{L}(p^x)$  est moins immédiate. Il suffit de vérifier cette propriété pour les intégrales  $I_+$  et  $I_-$  définies par :

$$I_- = \int_{-\infty}^0 p(X) \ln(1+(X+x)^2) dX ; \quad I_+ = \int_0^{+\infty} p(X) \ln(1+(X+x)^2) dX \quad (3)$$

A cet effet, on introduit la fonction  $f(.,x)$  suivante :

$$f(X,x) = \text{Ln}(1+(X+x)^2) - \text{Ln}(1+X^2) \quad \begin{cases} \varepsilon = +1 & \text{si } x > 0 \\ \varepsilon = -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$f(.,x)$  est une fonction positive sur  $\mathbb{R}^+$ , tendant vers 0 uniformément par rapport à  $x$  sur toute partie bornée de  $\mathbb{R}$  quand  $X \rightarrow +\infty$ , et décroissante pour  $X$  suffisamment grand. Par ailleurs, en vertu de la convergence de  $\mathcal{J}(p)$ , la fonction définie par :

$$a \rightarrow \left| \int_0^a p(X) dX \right| \quad (5)$$

est bornée sur  $\mathbb{R}$ . La convergence uniforme sur toute partie bornée de  $\mathbb{R}$  de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} p(X) f(X,x) dX$  résulte alors de la règle d'Abel. Puisque  $\mathcal{L}(p)$  converge, cette propriété est également vraie pour  $I_+$ . On la démontrerait de manière analogue pour  $I_-$ .

A partir de l'hypothèse de la convergence de  $\mathcal{J}(p)$  et  $\mathcal{L}(p)$  et en s'aidant de la remarque ci-dessus, on va établir maintenant l'existence et la continuité dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  des fonctions  $I_1^{(x,y)}(p)$ . Ces deux propriétés seront donc également démontrées pour le champ  $\xi$ .

*étude de  $I_1$*

On définit la fonction  $\mathcal{P}$  par :

$$\mathcal{P}(X) = \int_{-\infty}^X p(t) dt \quad (6)$$

On vérifie immédiatement que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathcal{P}(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{P}(x) &= \mathcal{J}(p) \end{aligned} \quad (7)$$

En intégrant par parties dans l'expression de  $I_1^{x,y}(p)$  pour  $y \neq 0$ , il vient alors

$$I_1^{x,y}(p) = -\frac{1}{y} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(X) \frac{dX}{1 + \left(\frac{X-x}{y}\right)^2} - \frac{\pi}{2} g(p) \quad (8)$$

puis en utilisant le changement de variables  $\alpha = \frac{X-x}{y}$  (défini et bijectif pour  $y \neq 0$ ), on obtient encore

$$I_1^{x,y}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(x+\alpha y) \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} - \frac{\pi}{2} g(p) \quad (9)$$

La fonction  $|\mathcal{P}(\cdot)|$  étant bornée, l'intégrale du membre de droite de (9) est normalement convergente et donc uniformément convergente dans  $\mathbb{R}^2$  par rapport à  $(x,y)$ . Ceci assure l'existence et la continuité dans  $\mathbb{R}^2$  de cette quantité, et donc l'existence et la continuité dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+$  de  $I_1^{x,y}(p)$ . De plus, la continuité du membre de droite de (9) permet d'affirmer que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow 0}} I_1^{x,y}(p) = \mathcal{P}(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} - \frac{\pi}{2} g(p) = \frac{\pi}{2} \left[ \int_{-\infty}^x p(X) dX - \int_x^{+\infty} p(X) dX \right] \quad (10)$$

qui exprime la continuité de  $I_1^{x,y}(p)$  sur la frontière  $\partial\Omega$ .

étude de  $I_2$

En effectuant dans l'expression donnée en (25) pour  $I^{x,y}(p)$  le changement de variables  $\alpha = (X-x)/y$ , défini et bijectif pour  $y \neq 0$ , on obtient l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(X) \frac{(X-x)y}{(X-x)^2 + y^2} dX = - \int_{-\infty}^{+\infty} y p(x+\alpha y) \frac{\alpha}{1+\alpha^2} d\alpha \quad (11)$$

En effectuant maintenant une intégration par parties dans le second membre de (11), il vient encore

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(X) \frac{(X-x)y}{(X-x)^2 + y^2} dX = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(x+\alpha y) \frac{1-\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2} d\alpha \quad (12)$$

Comme la fonction  $|\mathcal{P}(\cdot)|$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ , l'intégrale du membre de droite de (12) est normalement convergente, et donc uniformément convergente dans  $\mathbb{R}^2$ . C'est donc une fonction continue de  $(x,y)$  dans

$\mathbb{R}^2$ . L'existence et la continuité de  $I_2^{x,y}(p)$  dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^-$  en résultent et l'on a de plus

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow 0}} \int_{-\infty}^{+\infty} p(X) \frac{(X-x)y}{(X-x)^2 + y^2} dX = \mathcal{P}(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2} d\alpha = 0 \quad (13)$$

qui exprime la continuité de  $I_2^{x,y}(p)$  sur  $\partial\Omega$ .

*étude de  $I_3$  :*

On coupe l'intégrale considérée en 2 selon les intervalles  $]-\infty, x]$  et  $[x, +\infty[$ . On a :

$$\int_x^{+\infty} p(X) \text{Ln}((X-x)^2 + y^2) dX = \int_0^{+\infty} p(X+x) \text{Ln}(X^2 + y^2) dX \quad (14a)$$

et

$$\int_{-\infty}^x p(X) \text{Ln}((X-x)^2 + y^2) dX = \int_{-\infty}^0 p(X+x) \text{Ln}(X^2 + y^2) dX \quad (14b)$$

On introduit la fonction

$$f(X, y) = \varepsilon \{ \text{Ln}(X^2 + y^2) - \text{Ln}(X^2 + 1) \} \quad \begin{cases} \varepsilon = +1 & \text{si } y < -1 \\ \varepsilon = -1 & \text{si } y > -1 \end{cases} \quad (15)$$

On vérifie que  $f(., y)$  est positive, croissante sur  $\mathbb{R}^-$  et décroissante sur  $\mathbb{R}^+$  pour  $|X|$  suffisamment grand, et tend vers 0 quand  $|X| \rightarrow +\infty$ , uniformément par rapport à  $y$  dans tout domaine borné de  $\mathbb{R}^-$ . Par ailleurs, en raison de la convergence de  $\mathcal{J}(p)$ , il existe un réel  $k$  tel que

$$(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) (\forall x \in \mathbb{R}) \quad \left| \int_a^b p(X+x) dX \right| < k \quad (16)$$

La règle d'Abel établit donc la convergence uniforme dans tout domaine de la forme  $\mathbb{R} \times [\beta, 0]$  des intégrales

$$\int_0^{+\infty} p(X+x) f(X, y) dX \quad \int_{-\infty}^0 p(X+x) f(X, y) dX \quad (17)$$

La convergence uniforme sur toute partie bornée de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  des intégrales de (14a) et (14b) se déduit de ce résultat et du fait que  $\mathcal{L}(p^{-x})$  converge uniformément par rapport à  $x$  dans toute partie bornée de  $\mathbb{R}$ . On observe que la fonction  $(X, x, y) \rightarrow \text{Ln}(X-x)^2 + y^2$  est continue en dehors des points  $(x, x, 0)$ . Le théorème n°2 permet alors d'affirmer que la fonction  $I_3^{(\dots)}(p)$  est continue sur  $\Omega - \partial\Omega$ . La continuité sur en un point  $(a, 0)$  de la frontière requiert un raisonnement spécifique. On considère un réel  $\alpha > 0$  et deux suites  $x_n$  et  $y_n$  convergeant respectivement vers  $a$  et  $0$ . Par application du théorème n°4, on a:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}) \quad n > N \Rightarrow \left| \int_{|X-a| > \alpha} p(X) \text{Ln}((X-x_n)^2 + y_n^2) dX - 2 \int_{|X-a| > \alpha} p(X) \text{Ln}|X-a| dX \right| < \varepsilon \quad (18)$$

Par ailleurs, pour  $\alpha$  suffisamment petit et  $n$  suffisamment grand, on a

$$(\forall X \in [-\alpha, +\alpha]) \quad |\text{Ln}((X-x_n)^2 + y_n^2)| < |\text{Ln}(X-x_n)^2| \quad (19)$$

et donc

$$\left| \int_{|X-a| < \alpha} p(X) \text{Ln}((X-x_n)^2 + y_n^2) dX - 2 \int_{|X-a| < \alpha} p(X) \text{Ln}|X-a| dX \right| < 2 \|p\|_{\infty} (F(a-x_n + \alpha) + F(a-x_n - \alpha) + 2F(\alpha)) \quad (20)$$

où l'on a posé  $F(t) = |t(1 - \text{Ln}|t|)|$ . La proposition suivante résulte du fait que  $F$  tend vers 0 quand  $t \rightarrow 0$

$$(\exists \alpha > 0)(\exists N' \in \mathbb{N}) \quad n > N' \Rightarrow 2 \|p\|_{\infty} (F(a-x_n + \alpha) + F(a-x_n - \alpha) + 2F(\alpha)) < \varepsilon \quad (21)$$

En utilisant (18), (20) et (21), il vient enfin

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} p(X) \text{Ln}((X-x_n)^2 + y_n^2) dX - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} p(X) \text{Ln}|X-a| dX \right| < 2\varepsilon \quad (22)$$

qui exprime la continuité de  $I_3^{x,y}(p)$  à l'origine.

étude de  $I_4$

Pour  $y \neq 0$ , il est facile de voir que

$$I_4^{x,y}(p) = f(p) - \int_{-\infty}^{+\infty} p(X) \frac{y^2 dX}{(X-x)^2 + y^2} \quad (23)$$

soit encore, avec le changement de variables  $\alpha = \frac{X-x}{y}$

$$I_4^{x,y}(p) = f(p) + \int_{-\infty}^{+\infty} yp(x+\alpha y) \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} \quad (24)$$

et enfin, après intégration par parties

$$I_4^{x,y}(p) = f(p) + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(x+\alpha y) \frac{\alpha d\alpha}{(1+\alpha^2)^2} \quad (25)$$

Comme la fonction  $|\mathcal{P}(\cdot)|$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ , l'intégrale du membre de droite de (25) est normalement convergente, et donc uniformément convergente dans  $\mathbb{R}^2$ . C'est donc une fonction continue de  $(x,y)$  dans  $\mathbb{R}^2$ . L'existence et la continuité de  $I_4^{x,y}(p)$  dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+$  en résultent et l'on a de plus

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow 0}} I_4^{x,y}(p) = f(p) + 2\mathcal{P}(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha d\alpha}{(1+\alpha^2)^2} = f(p) \quad (26)$$

qui exprime la continuité de  $I_4^{x,y}(p)$  sur  $\partial\Omega$ .

### DIFFERENTIABILITE DE $\xi$

On suppose de nouveau la convergence des intégrales de II-(26). On démontre successivement de  $i=1$  à 4 la différentiabilité des fonctions  $I_i^{x,y}(p)$  par rapport à  $(x,y)$  et l'on en déduit la validité de la relation (II.4).

#### étude de $I_1$

En dérivant formellement sous le signe  $\int$  dans l'expression de  $I_1$  donnée en (9) pour  $y \neq 0$ , il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left( \mathcal{P}(x+\alpha y) \frac{1}{1+\alpha^2} \right) d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x+\alpha y) f_1^0(\alpha) d\alpha \quad (27a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} (\mathcal{P}(x+\alpha y) \frac{1}{1+\alpha^2}) d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x+\alpha y) f_1^1(\alpha) d\alpha \quad (27b)$$

Comme  $|p(\cdot)|$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  et que  $I_1^0$  définie par (II.14) converge absolument, les deux intégrales de (27a) convergent normalement et donc uniformément dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$ . Par application du théorème n°3, on peut donc affirmer que  $I_1$  est dérivable par rapport à  $x$  dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^-$  et que

$$\frac{\partial I_1}{\partial x} = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x+\alpha y) f_1^0(\alpha) d\alpha \quad (28)$$

Comme l'intégrale  $I_1^1$  ne converge pas absolument, l'existence et le calcul de la dérivée de  $I_1$  par rapport à  $y$  sont moins immédiats. On observe d'abord que la fonction

$$a \rightarrow \int_0^a p(x+\alpha y) d\alpha \quad (29)$$

est uniformément bornée sur tout domaine de la forme  $\mathbb{R} \times ]-\infty, \beta]$  ( $\beta < 0$ ) en raison de la convergence de  $\mathcal{J}(p)$ . Par ailleurs, la fonction  $\alpha \rightarrow \alpha/(1+\alpha^2)$  est respectivement négative croissante sur  $\mathbb{R}^-$ , positive décroissante sur  $\mathbb{R}^+$  et tend vers 0 quand  $|\alpha| \rightarrow \infty$ . La convergence uniforme des intégrales de (27b) est donc assurée sur un domaine  $\mathbb{R} \times ]-\infty, \beta]$  en vertu de la règle d'Abel. L'existence de la dérivée de  $I_1$  par rapport à  $y$  dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^-$  en résulte, par application du théorème n°3, ainsi que l'égalité

$$\frac{\partial I_1}{\partial y} = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x+\alpha y) f_1^1(\alpha) d\alpha \quad (30)$$

*étude de  $I_2$*

On obtient de même formellement, à partir de (12)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{P}(x+\alpha y) \frac{1-\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}) d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x+\alpha y) (f_2^0(\alpha) - f_2^2(\alpha)) d\alpha \quad (31a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left( p(x+\alpha y) \frac{1-\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2} \right) d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x+\alpha y) (f_2^1(\alpha) - f_2^3(\alpha)) d\alpha \quad (31b)$$

Les intégrales de (31a) convergent normalement, et donc uniformément sur  $\mathbb{R}^2$ . L'existence de la dérivée de  $I_2$  par rapport à  $x$  dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^-$  en résulte ainsi que l'égalité

$$\frac{\partial I_2}{\partial x} = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x+\alpha y) (f_2^0(\alpha) - f_2^2(\alpha)) d\alpha \quad (32)$$

La convergence uniforme sur tout domaine de la forme  $\mathbb{R} \times ]-\infty, \beta]$  ( $\beta < 0$ ) de l'intégrale de (31b) résulte de la règle d'Abel et permet d'affirmer que la dérivée de  $I_2$  par rapport à  $y$  dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^-$  existe et vaut

$$\frac{\partial I_2}{\partial y} = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x+\alpha y) (f_2^1(\alpha) - f_2^3(\alpha)) d\alpha \quad (33)$$

*étude de  $I_3$*

On vérifie d'abord que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} (p(X) \ln((X-x)^2 + y^2)) dX = 2 \frac{\partial I_1}{\partial y} \quad (34)$$

ce qui assure l'existence de  $\frac{\partial I_3}{\partial x}$  et démontre que

$$\frac{\partial I_3}{\partial x} = 2 \frac{\partial I_1}{\partial y} \quad (35)$$

par ailleurs

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} (p(X) \ln((X-x)^2 + y^2)) dX = -2 \frac{\partial I_1}{\partial x} \quad (36)$$

ce qui assure l'existence de  $\frac{\partial I_3}{\partial y}$  et démontre que



$$\frac{\partial I_3}{\partial y} = -2 \frac{\partial I_1}{\partial x} \quad (37)$$

étude de  $I_4$

On obtient formellement, à partir de la relation (25)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{P}(x+\alpha y) \frac{\alpha d\alpha}{(1+\alpha^2)^2}) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} p(x+\alpha y) f_2^1(\alpha) d\alpha \quad (38a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} (\mathcal{P}(x+\alpha y) \frac{\alpha d\alpha}{(1+\alpha^2)^2}) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} p(x+\alpha y) f_2^2(\alpha) d\alpha \quad (38b)$$

la convergence des intégrales de (38a) et (38b) est normale et donc uniforme sur  $\mathbb{R}^2$ , ce qui assure l'existence des dérivées partielles de  $I_4$  par rapport à  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^-$  et établit les égalités

$$\frac{\partial I_4}{\partial x} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} p(x+\alpha y) f_2^1(\alpha) d\alpha \quad (39)$$

$$\frac{\partial I_4}{\partial y} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} p(x+\alpha y) f_2^2(\alpha) d\alpha \quad (40)$$

En utilisant les expressions ci-dessus des dérivées partielles des fonctions  $I_1^{x,y}(p)$  dans les équations (II.24), il est facile de calculer la partie symétrique du gradient du champ  $\xi$ . On vérifie alors qu'elle est reliée au champ  $\underline{g}$  introduit en (II.9) par la loi de comportement (II.3). Il reste à étudier les conditions aux limites satisfaites à l'infini par le champ  $\xi$ .

#### COMPORTEMENT A L'INFINI DU CHAMP $\xi$

On se propose dans ce paragraphe d'étudier le comportement à l'infini du champ  $\xi$ . Plus précisément, il s'agit d'examiner si les conditions

(i), (ii) et (iii) sont satisfaites. On suppose que  $\mathcal{L}(p)$  converge absolument et que la fonction  $x \rightarrow |xp(x)|$  est bornée. On commence par examiner la propriété (ii) qui sera utile dans l'étude de (i).

propriété (ii)

Il s'agit d'étudier si la quantité  $\|\xi(x, y)\|$  est bornée dans  $\Omega$ . A partir des expressions données pour  $I_1^{x, y}(p)$  en (II.25), il est immédiat de vérifier que

$$(\forall (x, y) \in \Omega) \quad |I_1^{x, y}(p)| \leq \frac{\pi}{2} g(|p|) \quad (41)$$

A partir de (12), on a

$$(\forall (x, y) \in \Omega) \quad |I_2^{x, y}(p)| \leq g(|p|) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} = \pi g(|p|) \quad (42)$$

En utilisant les expressions données en (II.25) pour  $I_4^{x, y}(p)$ , on a

$$(\forall (x, y) \in \Omega) \quad |I_4^{x, y}(p)| \leq g(|p|) \quad (43)$$

La majoration de la fonction  $I_3^{x, y}(p)$  est moins évidente. Puisqu'elle est continue dans  $\Omega$ , cette fonction est bornée dans tout demi-disque de centre 0 et de rayon donné. On cherche donc un majorant de  $I_3^{x, y}(p)$  dans le domaine  $\rho \geq 1$ . On pose  $x = -\rho \cos \chi$  et  $y = -\rho \sin \chi$ . Il vient

$$I_3^{x, y}(p) = 2 \ln(\rho) g(p) + \int_{-\infty}^{+\infty} p(X) \ln \left( 1 + \frac{X^2 + 2X\rho \cos \chi}{\rho^2} \right) dX \quad (44)$$

On recherche une majoration de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |p(X)| \ln \left( 1 + \frac{X^2 + 2X\rho \cos \chi}{\rho^2} \right) dX \quad (45)$$

qui soit indépendante de  $\rho$ . On suppose par exemple que  $\cos \chi > 0$ . On va majorer successivement les quantités

$$K_1 = \int_0^{2\rho \cos \chi} |p(X)| \ln \left( 1 + \frac{X^2 + 2X\rho \cos \chi}{\rho^2} \right) dX \quad (46a)$$

$$K_2 = \int_{|X| > 2\rho \cos \chi} |p(X)| \ln \left( 1 + \frac{X^2 + 2X\rho \cos \chi}{\rho^2} \right) dX \quad (46b)$$

$$K_3 = \int_{-2\rho \cos \chi}^0 |p(X)| \ln \left( 1 + \frac{X^2 + 2X\rho \cos \chi}{\rho^2} \right) dX \quad (46c)$$

On a immédiatement

$$K_2 \leq \int_{|X| > 2\rho \cos \chi} |p(X)| \ln(1+2X^2) dX \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |p(X)| \{ \ln 2 + \ln(1+X^2) \} dX \quad (47)$$

En utilisant le changement de variable  $X=\rho u$  dans l'expression de  $K_1$ , il vient

$$K_1 = \int_0^{2\cos \chi} \rho |p(\rho u)| \ln(1+u^2+2u\cos \chi) du \leq 2 \int_0^{2\cos \chi} \rho |p(\rho u)| \ln(1+u) du \leq 2\ln 3 \int_0^2 \rho |p(\rho u)| du \quad (48)$$

Il reste à remarquer que

$$\int_0^2 \rho |p(\rho u)| du \leq \int_0^{2\rho} |p(X)| dX \leq \mathcal{J}(|p|) \quad (49)$$

qui donne, dans (48) :

$$K_1 \leq 2\ln 3 \cdot \mathcal{J}(|p|) \quad (50)$$

En utilisant maintenant le changement de variable  $X=\rho u$  dans l'expression de  $K_3$ , il vient

$$K_3 = \int_{-2\cos \chi}^0 \rho |p(\rho u)| \cdot |(\ln 1+u^2+2u\cos \chi)| du \quad (51)$$

Puisque  $\cos \chi > 0$ , on a  $1 \pm u^2 + 2u\cos \chi \geq (1+u)^2$ , et donc

$$K_3 \leq 2 \int_{-2}^0 \rho |p(\rho u)| \cdot |(\ln |1+u|)| du \quad (52)$$

On découpe maintenant l'intégrale de (52) :

$$\int_{-2}^0 \rho |p(\rho u)| \cdot |(\ln |1+u|)| du \leq \int_{-1/2}^0 \rho |p(\rho u)| \cdot |(\ln |1+u|)| du + \int_{-2}^{-1/2} \rho |p(\rho u)| \cdot |(\ln |1+u|)| du$$

Il reste à observer que

$$\int_{-1/2}^0 \rho |p(\rho u)| \cdot |(\ln|1+u|)| du \leq \ln 2 \cdot \int_{-1/2}^0 \rho |p(\rho u)| du \leq \ln 2 \cdot \mathcal{J}(|p|) \quad (54)$$

et, en se souvenant que la fonction  $x \rightarrow |xp(x)|$  est bornée :

$$\int_{-2}^{-1/2} \rho |p(\rho u)| \cdot |(\ln|1+u|)| du \leq \|xp(x)\|_{\infty} \cdot \int_{-2}^{-1/2} \frac{|(\ln|1+u|)|}{|u|} du \quad (55)$$

En utilisant (54) et (55), on a donc

$$K_3 \leq \|xp(x)\|_{\infty} \cdot \frac{3+\ln 2}{2} + \ln 2 \cdot \mathcal{J}(|p|) \quad (56)$$

Les majorations (50), (52) et (56) démontrent que l'intégrale de (45) est bornée dans  $\Omega$ . La relation (44) prouve alors que la condition

$$\mathcal{J}(p)=0 \quad (57)$$

est nécessaire et suffisante pour que  $I_3^{x,y}(p)$  soit bornée. Les relations (41), (42) et (43) montrent alors que (57) est également nécessaire et suffisante pour que le champ  $\xi$  possède la propriété (ii).

propriété (i)

Soit un angle  $\chi \in ]0, \pi[$ . On pose  $x = -\rho \cos \chi$  et  $y = -\rho \sin \chi$ . On recherche les limites

$$L_j = \lim_{\rho \rightarrow \infty} I_j^{x,y}(p) \quad (58)$$

successivement pour  $j=1, 2, 3$  et 4.

$j=1$

La fonction  $I_1^{x,y}(p)$  a été donnée en (II.25). Puisque  $\mathcal{L}(p)$  converge absolument, il en est de même de  $\mathcal{J}(p)$ . Comme de plus la fonction  $x \rightarrow |\arctg(x)|$  est bornée par  $\frac{\pi}{2}$ , le théorème de la convergence dominée s'applique au calcul de  $L_1$ . Il donne :

$$L_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(X) \arctg\left(-\frac{\cos\chi}{\sin\chi}\right) d\chi = \left(\chi - \frac{\pi}{2}\right) f(p) \quad (59)$$

$j=2$

En utilisant l'expression donnée en (12) pour  $I_2^{X,Y}(p)$ , on est ramené à calculer

$$L_2 = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(-\rho(\cos\chi + \alpha \sin\chi)) \frac{1-\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2} d\alpha \quad (60)$$

Il est facile de voir que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \mathcal{P}(-\rho(\cos\chi + \alpha \sin\chi)) = \begin{cases} f(p) & \text{si } \alpha < -\frac{\cos\chi}{\sin\chi} \\ 0 & \text{si } \alpha > -\frac{\cos\chi}{\sin\chi} \end{cases} \quad (61)$$

Le théorème de la convergence dominée s'applique donc au calcul de  $L_2$  et donne

$$L_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\cos\chi}{\sin\chi} \frac{1-\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2} d\alpha = -\cos\chi \sin\chi f(p) \quad (62)$$

$j=3$

Il résulte du travail exposé précédemment sur l'intégrale de (45) et du théorème de la convergence dominée que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(X) \ln\left(1 + \frac{X^2 + 2X\rho \cos\chi}{\rho^2}\right) dX = 0 \quad (63)$$

L'identité (44) montre alors que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{I_3^{X,Y}(p)}{2\ln(\rho)} = f(p) \quad \text{si } f(p) \neq 0 \quad (64)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} I_3^{X,Y}(p) - 2\ln(\rho) f(p) = 0 \quad \text{si } f(p) = 0 \quad (65)$$

$j=4$

En utilisant l'expression donnée en (25) pour  $I_4^{X,Y}(p)$ , on est ramené à l'étude de

$$L_4 = \lim_{\rho \rightarrow \infty} 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(-\rho_n(\cos\chi + \alpha \sin\chi)) \frac{\alpha d\alpha}{(1+\alpha^2)^2} + \mathcal{J}(p) \quad (66)$$

Une fois de plus, le théorème de la convergence dominée va permettre de conclure :

$$L_4 = \mathcal{J}(p) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\chi}{\sin\chi} \frac{2\alpha d\alpha}{(1+\alpha^2)^2} = \mathcal{J}(p) \cos^2\chi \quad (67)$$

Les équations (59), (62), (64)-(65) et (67), il résulte d'abord que la condition (57) est nécessaire et suffisante pour que le champ  $\xi$  possède la propriété (i). Lorsque  $\mathcal{J}(p) \neq 0$ , on introduit le champ  $\xi^\infty$  défini par:

En s'appuyant sur les valeurs de  $L_j$ , il est facile de voir que

$$(\forall \chi \in [0, \pi]) \lim_{\rho \rightarrow \infty} \|\xi - \xi^\infty\| = 0 \quad (69)$$

En faisant maintenant le changement de variable  $\chi = \theta + \frac{\pi}{2}$  pour se ramener aux notations de l'Annexe 1, on observe que le champ  $\xi^\infty$  coïncide avec "le" champ de déplacements correspondant à une charge linéique verticale d'intensité  $\mathcal{J}(p)$  disposée le long de la droite  $x=y=0$ . A l'unicité près de la solution, la proposition (69) exprime que l'effet à l'infini de la répartition de pressions  $p(\cdot)$  est entièrement caractérisée par la valeur de la résultante de ces pressions, sans qu'il soit besoin d'imposer que le support de  $p(\cdot)$  soit compact.

#### *propriété (iii)*

La propriété (iii) résulte du fait que la fonction  $p(\cdot)$  admet une primitive bornée et que la fonction  $x \rightarrow |xp(x)|$  est bornée. La démonstration de ce résultat est identique à celle de la propriété (j) qui est établie au paragraphe 3.b.3 du texte et à laquelle on pourra se reporter.

En résumé, pour une fonction  $p(\cdot)$  telle que l'intégrale  $\mathcal{L}(p)$  converge absolument et que la

fonction  $x \rightarrow |xp(x)|$  soit bornée, la condition  $\mathcal{J}(p)=0$  est nécessaire et suffisante pour que le champ  $\xi$  de (II.8) soit solution du problème  $B_1$ . Si  $\mathcal{J}(p)$  est non nul, alors le champ  $\xi$  de (II.8) tend asymptotiquement vers le champ de déplacements correspondant à une charge linéique d'intensité  $\mathcal{J}(p)$ .

## ANNEXE 5 - Réponse élastique à la houle linéaire; le calcul de Fung

On recherche la réponse d'un massif monophasique élastique à une houle linéaire. Pour une longueur d'onde  $L=2\pi/k$  et une période  $T=2\pi/\omega$ , la pression s'exerçant sur le plan  $y = 0$  est donnée par :

$$p(x,t) = p_0 \sin(kx - \omega t) \quad (1)$$

Le calcul de la réponse du massif à la distribution de pression  $p(.,0)$  a été effectué par Fung (1965) dont les développements suivants s'inspirent.

On recherche le champ de déplacements  $\underline{\xi}$ , définis et  $C^1$  sur le demi-espace  $\Omega$ , le champ de contraintes  $\underline{\sigma}$ , et le champ de déformations  $\underline{\varepsilon}$ , qui vérifient les équations suivantes :

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} = \underline{0} \quad (2)$$

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{j} = -p_0 \sin kx \underline{j} \quad (3)$$

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\sigma} - \frac{\nu}{E} \operatorname{tr}(\underline{\sigma}) \underline{I}_3 \quad (4)$$

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\operatorname{grad} \underline{\xi} + {}^t \operatorname{grad} \underline{\xi}) \quad (5)$$

$$\lim_{d(M, \partial\Omega) \rightarrow \infty} \underline{\xi}(M) = \underline{0} \quad (6)$$

Puisque la distribution de pression agissant sur  $\partial\Omega$  est indépendante de la coordonnée  $z$ , il est naturel de poser le problème en déformations planes ( $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zz} = 0$ ). On est alors amené à rechercher une fonction  $\phi$  biharmonique telle que le champ de contraintes  $\underline{\sigma}$  qui en dérive par les relations :

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (7)$$



satisfasse la condition aux limites (3). Tout d'abord, cette condition suggère de séparer dans  $\phi$  les variables  $x$  et  $y$  et en posant :

$$\phi(x,y)=f(y)\sin kx \quad (8)$$

Le fait que  $\phi$  soit biharmonique impose à  $f(.)$  de vérifier l'équation différentielle :

$$f^{(4)} - 2k^2 f^{(2)} + k^4 f = 0 \quad (9)$$

Les solutions de (9) sont les combinaisons des fonctions  $e^{\pm ky}$  et  $ye^{\pm ky}$ . Il s'agit donc de déterminer un quadruplet  $(A,B,C,D)$  de réels tel que  $\phi$  s'écrive :

$$\phi(x,y)=(Ae^{ky}+Be^{-ky}+Cye^{ky}+Dye^{-ky})\sin kx \quad (10)$$

La condition (6) interdisant aux composantes de  $\underline{\underline{\epsilon}}$  et donc de  $\underline{\underline{\sigma}}$  de tendre vers l'infini lorsque  $y \rightarrow \infty$ , on a donc nécessairement  $B=D=0$ . En tenant compte de (7) et (10) dans (3), il vient alors :

$$A=p_0/k^2 \quad C=-kA=-p_0/k \quad (11)$$

La fonction d'Airy de la classe envisagée est donc nécessairement :

$$\phi(x,y)=p_0 \cdot \frac{1-ky}{k^2} e^{ky} \sin kx \quad (12)$$

Le calcul du champ de contraintes dérivant de  $\phi$  par (7) donne :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -p_0 e^{ky} (ky+1) \sin kx \\ \sigma_{yy} &= p_0 e^{ky} (ky-1) \sin kx \\ \sigma_{xy} &= p_0 e^{ky} (ky) \cos kx \end{aligned} \quad (13)$$

Le champ de déformations  $\underline{\underline{\epsilon}}$  relié à  $\underline{\underline{\sigma}}$  par (4) est intégrable par construction. Le champ de déplacements  $\underline{\underline{\xi}}$  dont dérive  $\underline{\underline{\epsilon}}$  par (5) et qui vérifie (6) coïncide avec le champ de déplacement donné en (II.65).

## ANNEXE 6 - Calcul de $\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)$

La fonction  $u$  est définie à partir de  $p(\cdot)$  par (II.17). On adopte les hypothèses suivantes :

- (1)  $p(\cdot)$  est continue et bornée en valeur absolue, 2 fois dérivable
- (2)  $p'(\cdot), p''(\cdot)$  sont bornées en valeur absolue

On cherche à démontrer l'existence de  $\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)$  et à calculer sa valeur. Soit  $\varepsilon > 0$ . En utilisant dans (II.17) le changement de variable  $X=x+\alpha y$ , on obtient

$$\pi \frac{u(x,y)-u(x,0)}{y} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(X)-p(x)}{(X-x)^2+y^2} dX = \int_{|X-x|>\varepsilon} \frac{p(X)-p(x)}{(X-x)^2+y^2} dX + \int_{|X-x|<\varepsilon} \frac{p(X)-p(x)}{(X-x)^2+y^2} dX \quad (1)$$

On observe d'abord que

$$\int_{|X-x|>\varepsilon} \frac{|p(X)-p(x)|}{(X-x)^2+y^2} dX \leq \int_{|X-x|>\varepsilon} 2\|p\|_{\infty} \cdot \frac{dX}{(X-x)^2} \quad (2)$$

Le théorème de la convergence dominée s'applique donc et donne

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{|X-x|>\varepsilon} \frac{p(X)-p(x)}{(X-x)^2+y^2} dX = \int_{|X-x|>\varepsilon} \frac{p(X)-p(x)}{(X-x)^2} dX \quad (3)$$

ce qui s'exprime encore par:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists A > 0) \quad |y| < A \Rightarrow \left| \int_{|X-x|>\varepsilon} \frac{p(X)-p(x)}{(X-x)^2+y^2} dX - \int_{|X-x|>\varepsilon} \frac{p(X)-p(x)}{(X-x)^2} dX \right| \leq \varepsilon \quad (4)$$

Si l'on applique maintenant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction  $p$ , il vient

$$(\forall X \in \mathbb{R})(\exists \tau \in [0,1]) \quad p(X)-p(x) = p'(x)(X-x) + p''(x+\tau(X)(X-x)) \frac{(X-x)^2}{2} \quad (5)$$

ce qui donne

$$\left| \int_{|X-x|<\varepsilon} \frac{p(X)-p(x)}{(X-x)^2+y^2} dX \right| \leq |p'(x)| \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{udu}{u^2+y^2} + \left| \frac{1}{2} \int_{|X-x|<\varepsilon} p''(x+\tau(X)(X-x)) dX \right| \quad (6)$$

Comme la première intégrale du membre de droite de (6) est nulle, on a donc

$$\left| \int_{|X-x|<\varepsilon} \frac{p(X)-p(x)}{(X-x)^2+y^2} dX \right| \leq \varepsilon \cdot \|p''\|_{\infty} \quad (7)$$

Il résulte de (1), (4) et (7) que

$$|y|<A \Rightarrow \left| \pi \frac{u(x,y)-u(x,0)}{y} - \int_{|X-x|>\varepsilon} \frac{p(X)-p(x)}{(X-x)^2} dX \right| \leq \varepsilon (1 + \|p''\|_{\infty}) \quad (8)$$

Pour démontrer l'égalité

$$\pi \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \pi \frac{u(x,y)-u(x,0)}{y} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|X-x|>\varepsilon} \frac{p(x)-p(X)}{(X-x)^2} dX \quad (9)$$

il suffit donc d'établir l'existence de la limite du membre de droite. Soit  $(\varepsilon_n)$  une suite de réels tendant vers 0 et  $(L_n)$  la suite définie à partir de  $(\varepsilon_n)$  par

$$L_n = \int_{|X-x|>\varepsilon_n} \frac{p(X)-p(x)}{(X-x)^2} dX \quad (10)$$

En utilisant (5), il est facile de voir que

$$|L_n - L_p| \leq |\varepsilon_n - \varepsilon_p| \cdot \|p''\|_{\infty} \quad (11)$$

(11) exprime que la suite  $(L_n)$  est de Cauchy, ce qui prouve qu'elle converge et achève de démontrer la relation (9).

## CHAPITRE III : STABILITE D'UN MASSIF DE SOL COHERENT

### 1 - PROBLÈME POSÉ ET CADRE D'ÉTUDE

On considère un massif de sol occupant le demi-espace  $\Omega$  délimité supérieurement par le plan d'équation  $y=0$ , qui forme un angle  $\chi$  avec la direction horizontale (voir figure 1). Ce massif est immergé en partie gauche (vers les  $x$  négatifs). On désigne par  $d$  la profondeur d'eau au point courant du fond marin et par  $d_0$  la profondeur d'eau à l'origine des axes. La sollicitation à laquelle le massif est soumis est constituée par les forces volumiques de pesanteur caractérisées par le poids volumique  $\gamma$ , et par une onde plane de pressions s'exerçant sur le fond marin durant un intervalle de temps  $[0, t_0]$ . Celle-ci est caractérisée en toute généralité par une fonction  $p(x, t)$  définie sur  $\mathbb{R} \times [0, t_0]$ . Elle rassemble les effets de la pression hydrostatique et de la houle de surface. On suppose que la mer est au repos pour  $t < 0$ . Dans ce chapitre consacré au sol purement cohérent, les capacités de résistance du matériau constituant le massif sont décrites par le critère de Tresca.

On se propose d'étudier la question de la stabilité du massif soumis à cette sollicitation dans le cadre de la théorie du Calcul à la Rupture en déformations planes qui a été présentée par Salençon (1983). Il s'agit en premier lieu de définir un mode de chargement dans lequel la sollicitation puisse être identifiée à un processus particulier. C'est l'objet des paragraphes 1.a, b, c. Le paragraphe 1.d fait l'inventaire des différentes modélisations qui seront envisagées pour décrire la cohésion du matériau.

#### 1.a une famille de modes de chargements

Soit un  $N$ -uplet  $(f_1, \dots, f_N)$  de fonctions numériques définies sur  $\mathbb{R}$ , et

supposées linéairement indépendantes. Il engendre un espace vectoriel  $F$  à partir duquel un mode de chargement est construit de la manière suivante :

- les champs de contraintes statiquement admissibles dans le mode sont constitués par les champs de tenseur  $\underline{\sigma}$  équilibrant une densité volumique  $\underline{\gamma} = -\gamma(\underline{i}\sin\chi + \underline{j}\cos\chi)$  de forces de pesanteur et un champ de pressions défini par un élément quelconque de  $F$ , s'exerçant sur le fond marin. Ces champs de contraintes forment un espace vectoriel noté  $S$ . On a donc :

$$(\forall \underline{\sigma} \in S)(\exists! (\gamma; \lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{N+1}) \text{ tels que :}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}^-) \operatorname{div} \underline{\sigma} + \underline{\gamma} = 0 \quad (1)$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \sigma_{xy}(x, 0) = 0 ; \sigma_{yy}(x, 0) = - \sum_{i=1}^N \lambda_i f_i(x)$$

- les champs de vitesse  $\underline{V}$  vérifiant la condition  $\lim_{0 \leq M \rightarrow \infty} \|\underline{V}(M)\| = 0$  et  $C^1$  par morceaux sont dits cinématiquement admissibles dans le mode et forment un espace vectoriel noté  $C$ .

On désigne par  $\Gamma$  l'application définie sur  $S$  qui, à un champ  $\underline{\sigma}$ , associe la fonction  $\sigma_{yy}(x, 0)$  définie sur la frontière  $y=0$  et par  $I$  l'isomorphisme de  $F$  sur  $\mathbb{R}^N$  qui, à un élément de  $F$ , associe ses composantes dans la base  $(f_1, \dots, f_N)$ . On introduit alors l'application linéaire  $\underline{Q}$  de  $S$  dans  $\mathbb{R}^{N+1}$  par :

$$\underline{Q}(\underline{\sigma}) = (I \circ \Gamma(\underline{\sigma}), \gamma) \quad (2)$$

Par ailleurs, on introduit l'application linéaire  $\underline{q}$  de  $C$  dans  $\mathbb{R}^{N+1}$  telle que :

$$\underline{q}(\underline{V}) = \left( \left( - \int_{-\infty}^{+\infty} V_y \cdot f_i \, dx \right)_{1 \leq i \leq N}, - \int_{\Omega} V_y \cos \chi \, d\Omega \right) \quad (3)$$

Avec ces notations, le principe des puissances virtuelles prend la forme classique suivante :

$$(\forall \underline{\underline{\sigma}} \in S)(\forall \underline{\underline{V}} \in C) \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} \, d\Omega + \int_{\Sigma} [\underline{\underline{V}}] \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} \, d\Sigma = Q(\underline{\underline{\sigma}}) \cdot \dot{\underline{\underline{g}}}(\underline{\underline{V}}) \quad (4)$$

où  $\Sigma$  désigne la réunion des surfaces de discontinuités du champ de vitesse  $\underline{\underline{V}}$ , et  $[\underline{\underline{V}}](x)$  représente la discontinuité de vitesses au point  $x$  de  $\Sigma$ .

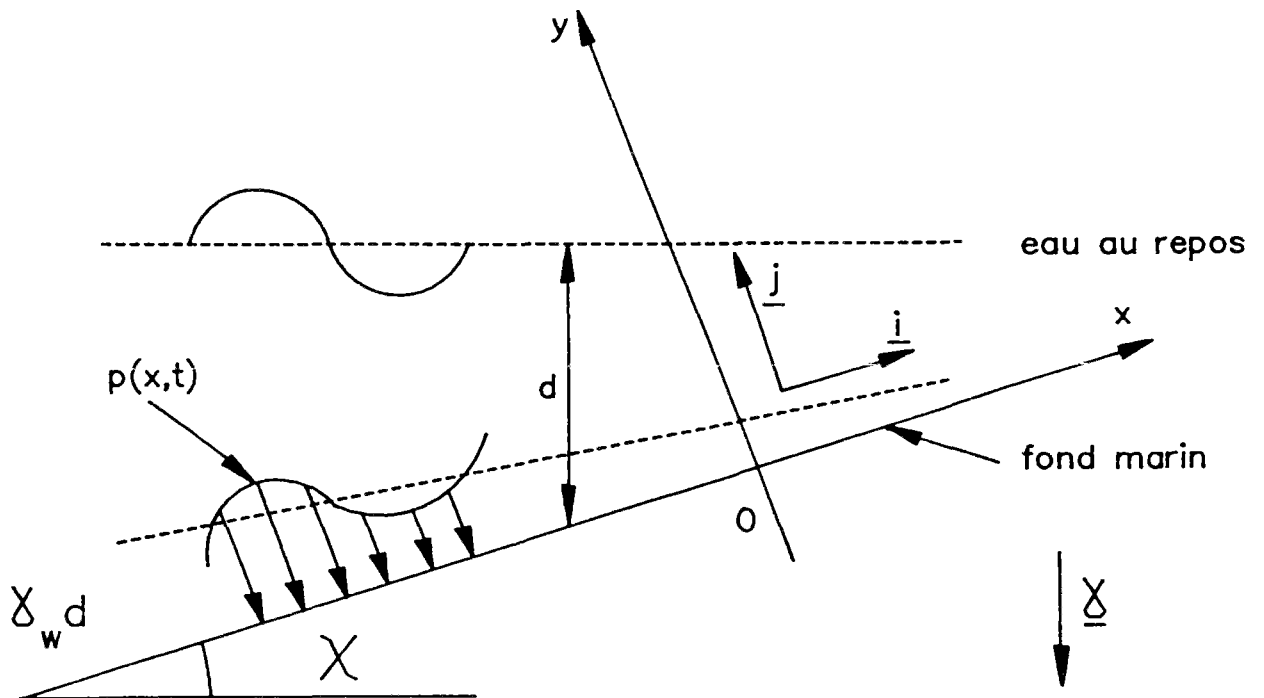


Figure 1. Schéma de principe de la houle agissant sur une pente sous-marine

La notion de mode de chargement et en particulier la définition des espaces  $S$  et  $C$  et des applications linéaires  $Q$  et  $\dot{g}$  constituent un formalisme bien adapté à la mise en oeuvre du Calcul à la Rupture qui sera l'outil de base de ce chapitre.

Pour le cas particulier où le fond marin est horizontal, les forces de pesanteur et la pression hydrostatique de l'eau au repos peuvent être équilibrées par des champs de contraintes purement sphériques.

Vis-à-vis du critère de TRESCA, les chargements correspondants ne sauraient donc conduire à une instabilité. En d'autres termes, la seule sollicitation à prendre en compte est la composante due à la houle de la pression s'exerçant sur le fond marin. Cette observation permet de réduire de 2 la dimension de l'espace des paramètres de chargements.

Pour qu'une sollicitation particulière définie par une valeur de  $\gamma$  et par une fonction de pression  $p$  soit un processus dans un mode de chargement du type précédent, il faut pouvoir exhiber une famille  $(f_n)$  de fonctions engendrant un espace vectoriel auquel appartiennent toutes les fonctions  $p(.,t)$  lorsque  $t$  décrit l'intervalle d'étude. On étudie maintenant le cas particulier essentiel de la houle de STOKES d'ordre  $n$ .

## 1.b houle de Stokes d'ordre $n$

### 1.b.1 Première approche du mode de chargement

On rappelle que cette théorie a été développée dans l'hypothèse d'un fond marin horizontal. On a donc  $\chi=0$  et la profondeur d'eau  $d=d_0$  est une constante. La sollicitation est entièrement définie par la surpression  $p_h$  due à la houle, dont la forme est donnée par l'équation (37) en supprimant le terme hydrostatique. Les notations sont celles du Chapitre I.

A chaque instant,  $p_h(.,t)$  est un élément de l'espace vectoriel  $\text{vect}((\cos ikx, \sin ikx)_{1 \leq i \leq n})$ . Cette fonction est définie par la donnée du triplet  $\mathcal{P}_t = (H(t), L, d)$ . La sollicitation est donc un processus particulier dans le mode de chargement à  $2n$  paramètres construit à l'aide de l'espace vectoriel précédent. Ce processus est caractérisé par :

$$(\forall i \in \{1, \dots, n\}) \quad \begin{cases} Q_{2i-1}(t) = p_{i-1}(\varphi_t) \cos(i\omega t) \\ Q_{2i}(t) = p_{i-1}(\varphi_t) \sin(i\omega t) \end{cases} \quad (5)$$

Il correspond géométriquement à un certain trajet de chargement dans  $\mathbb{R}^{2n}$ . Une manière d'aborder l'étude de la stabilité du massif soumis à la houle de STOKES d'ordre  $n$  pourrait donc être de tenter la détermination dans  $\mathbb{R}^{2n}$  du domaine des chargements potentiellement supportables dans ce mode. Le mode de chargement ainsi défini présente l'avantage de permettre à chaque instant la prise en compte des conditions aux limites imposées dans le temps par la sollicitation sur le fond marin. Si l'on aborde le problème sous l'angle de l'Elastoplasticité, une telle description pas-à-pas du chargement est une nécessité. Dans ce cas, des conditions de régularité doivent être imposées à la fonction  $p(x, \cdot)$  qui doit être continue (par rapport au temps) pour toute valeur de  $x$ . Cela revient à imposer la continuité de la fonction  $H(t)$ . Avec cette restriction, la résolution du problème en Elastoplasticité fait alors appel à la donnée explicite de l'évolution de cette fonction.

Dans la pratique, ce genre d'information fait le plus souvent défaut, la houle de projet étant en général caractérisée par une période et une amplitude constantes. Pour ce type de données, si l'on part d'un état initial où la mer est au repos,  $H(\cdot)$  est une fonction-échelon, ce qui n'a pas de sens dans le cadre de l'Elastoplasticité. Le Calcul à la Rupture va permettre de surmonter cette difficulté tout en réduisant la dimension de l'espace des paramètres de chargement.

### 1.b.2 Un mode de chargement simplifié

Pour que la stabilité potentielle du massif soumis à une sollicitation définie sur un intervalle de temps  $[0, t_0]$  soit assurée, il faut et il suffit que le massif soit potentiellement stable à chaque instant. En d'autres termes, il s'agit de figer l'onde de pressions  $p_h$  à chaque



instant  $t$  particulier et d'étudier la stabilité potentielle du massif sous l'action de  $p_h(.,t)$ . En particulier, ce point de vue permet de donner un sens au problème de la houle de projet (houle de STOKES d'amplitude constante). Soit donc une sollicitation définie sur  $[0, t_0]$  par l'équation (37) sans le terme hydrostatique. On pose :

$$\bar{p}(x,t) = \sum_{i=1}^n p_{i-1}(\mathcal{P}_t) \cos(ikx) \quad (6)$$

En faisant l'hypothèse d'*invariance par translation* le long du fond marin des capacités de résistance du matériau, il apparaît que les champs de pressions  $p(.,t)$  et  $\bar{p}(.,t)$  sont équivalents du point de vue de la stabilité potentielle du massif. Pour s'en assurer, il suffit d'observer l'égalité de  $p(x,t)$  et  $\bar{p}(x - \frac{L}{T}t, t)$ . Physiquement, cela signifie que les deux sollicitations définies respectivement par l'onde progressive  $p$  et l'onde stationnaire  $\bar{p}$  sont interchangeable du point de vue du Calcul à la Rupture. L'intérêt de cette remarque réside dans le fait que l'onde stationnaire peut être traitée dans le cadre d'un mode de chargement plus simple que le précédent.

En effet, observant que  $\bar{p}(.,t)$  est élément de  $\text{vect}((\cos ikx)_{1 \leq i \leq n})$ , on introduit le mode de chargement à  $n$  paramètres défini sur cet espace vectoriel. La sollicitation associée à  $\bar{p}$  constitue un processus de chargement dans ce mode, défini par la fonction vectorielle  $\underline{Q}'$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ :

$$(\forall i \in \{1, \dots, n\}) \quad Q'_i(t) = p_{i-1}(\mathcal{P}_t) \quad (7)$$

Par ce procédé, la dimension de l'espace des paramètres de chargements a été réduite de moitié. Ainsi, bien que la sollicitation définie par  $p_h(x,t)$  n'appartienne pas au mode de chargement qui vient d'être défini, ce dernier permet l'étude de la stabilité du massif. En désignant par  $K'_n$  le domaine des chargements potentiellement supportables dans ce mode, les sollicitations  $p$  et  $\bar{p}$  seront elles-mêmes potentiellement supportables si et seulement si la

fonction  $Q'(t)$  de (7) est entièrement à valeurs dans  $K'_n$ .

La question de la stabilité potentielle du massif soumis à la houle de STOKES d'ordre  $n$  peut donc être résolue par la détermination du domaine  $K'_n$ . Cependant, bien que  $R^n$  soit "un bon espace" de paramètres de chargements pour le Calcul à la Rupture, ceux-ci sont peu maniables du point de vue du projeteur, qui caractérise la sollicitation par triplet  $(H, L, d)$ . Cette observation pose la question des valeurs "potentiellement supportables" de  $H, L$  et  $d$ .

### *1.b.3 Espace des chargements $(H, L, d)$*

On a vu que la notion de houle de projet n'est pas utilisable du point de vue de l'Elastoplasticité. En revanche, le Calcul à la Rupture a permis de lui donner un sens. Et c'est en fait parce que le concept de houle de projet aborde l'effet de la sollicitation "houle" dans l'esprit-même du Calcul à la Rupture. En effet, il consiste à définir celle-ci non pas en termes de processus de chargement prescrit dans le temps, mais par la donnée des paramètres  $H, L, d$  qui définissent en quelque sorte un chargement dans  $R^3$ . Pour le projeteur, il s'agit de s'assurer que les valeurs de  $H, L$  et  $d$  considérées ne conduisent pas à une instabilité du massif. La connaissance de  $K'_n$  permet de définir le domaine  $K_n$  de  $R^3$  des "chargements"  $(H, L, d)$  potentiellement supportables : ce n'est autre que  $\mathcal{H} \cap \mathcal{P}_n^{-1}(K'_n)$ , intersection du domaine  $\mathcal{H}$  des valeurs possibles de  $(H, L, d)$  et de l'image réciproque de  $K'_n$  par l'application  $\mathcal{P}_n$ . L'emploi du domaine  $K_n$  est clairement généralisable au cas d'une houle de Stokes d'ordre  $n$  d'amplitude variable, qui sera potentiellement supportable si et seulement si  $\mathcal{P}_t$  est à valeurs dans  $K_n$ . La détermination de  $K_n$  sera étudiée dans la suite de ce chapitre pour les valeurs de  $n=1$  et  $2$ .

### *1.c onde de pressions de forme quelconque*

Le paragraphe 1.a définit le cadre général pour le calcul de stabilité d'un massif sous-marin : il consiste à rechercher le système

générateur ( $f_n$ ) de fonctions numériques élémentaires le plus petit possible dans lequel le type d'ondes de pressions utilisé pour la modélisation de la houle puisse être étudié. Cette approche est fructueuse pour l'étude de la stabilité sous l'action d'une houle de Stokes. Elle serait également adéquate si l'onde de pressions était considérée comme la superposition d'ondes monochromatiques de longueurs d'ondes données, comme on en fait souvent l'hypothèse dans l'étude de la houle non régulière.

Un cas particulier élémentaire du mode de chargement précédent consiste à définir la surpression de la houle par une *fonction de forme*  $p_h(x)$  et une amplitude  $\lambda$ . La stabilité du massif sous l'action combinée de  $\lambda p_h(x)$ , de la pression hydrostatique  $\gamma_w d(x)$  et de la pesanteur peut être étudiée dans un mode de chargement à 3 paramètres  $(\lambda, \gamma_w, \gamma)$  du type défini précédemment avec  $f_1(x)=p_h(x)$  et  $f_2(x)=d(x)$ . Certains résultats concernant le domaine tridimensionnel des chargements  $(\lambda, \gamma_w, \gamma)$  potentiellement supportables seront énoncés dans la suite sans particulariser la fonction de forme  $p_h(.)$ .

#### 1.d les critères de résistance

Comme cela a été annoncé, les capacités de résistance du matériau constituant le massif sont décrites dans ce chapitre par un critère de Tresca. Celui-ci est défini par la donnée de la cohésion en tout point de  $\Omega$  (voir Annexe 1). Dans le cas général du matériau hétérogène et anisotrope, la cohésion est une fonction du point considéré dans le massif, qui dépend également de l'orientation des directions principales du tenseur des contraintes. L'hétérogénéité et l'anisotropie du matériau dépendent dans une large mesure du niveau de surconsolidation du matériau.

Dans les milieux sous-marins, les sols fins normalement consolidés occupent une part considérable. C'est la raison pour laquelle une place prépondérante leur revient dans ce chapitre. L'hétérogénéité de la cohésion d'un tel matériau est bien modélisée en adoptant un profil

linéaire en fonction de la profondeur, c'est-à-dire  $C(y) = -\gamma_c y$ . Le coefficient  $\gamma_c$  est appelé gradient de cohésion. Lorsqu'il est indépendant de l'orientation des contraintes, le gradient de cohésion est une constante et le critère est dit linéaire isotrope.

Cependant, il est possible de tenir compte simultanément de l'hétérogénéité de ce type de sol et de son anisotropie. Dans le cas d'un massif à surface horizontale, il est raisonnable de supposer que le matériau est transversalement isotrope autour de la direction verticale Oy. Notant  $\delta$  l'angle entre Oy et la direction principale mineure du tenseur des contraintes, une modélisation hétérogène anisotrope simple consiste à poser  $C(M, \delta) = -\gamma_c(\delta)y$ . Les variations de la fonction  $\gamma_c(\delta)$  sont décrites dans cette étude à l'aide du modèle introduit par Bishop (1966). Le critère correspondant est dit linéaire anisotrope. Il fait appel à la donnée du coefficient  $\gamma_c(0)$  et à deux coefficients d'anisotropie  $K_1$  et  $K_2$  définis par :

$$K_1 = \frac{\gamma_c(\pi/2)}{\gamma_c(0)} \quad K_2 = \frac{\gamma_c(\pi/4)}{\gamma_c(0)} \quad (8)$$

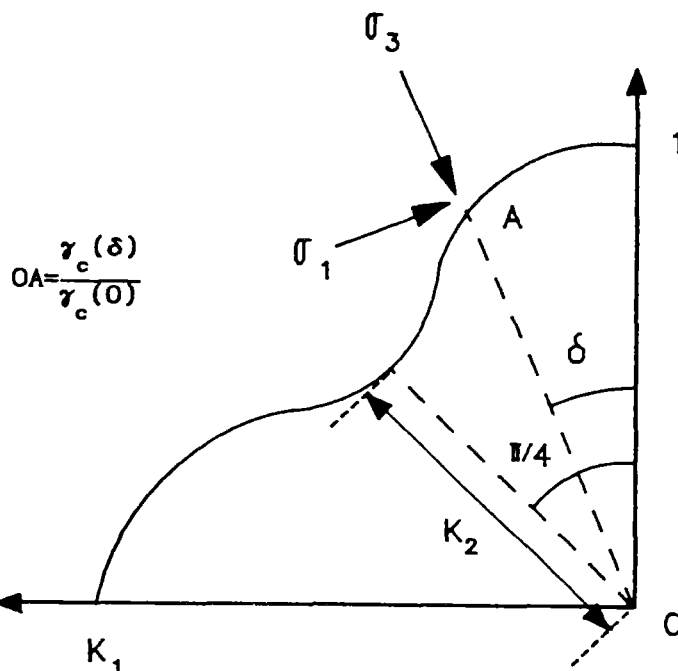


Figure 2. Variations de  $\gamma_c(\delta)$  selon la formule de Bishop

En posant  $a=1-K_1$  et  $b=1-2K_2/(1+K_1)$ , l'expression de  $\gamma_c(\delta)$  est la suivante :

$$\gamma_c(\delta)=\gamma_c(0)(1-a \sin^2\delta)(1-b \sin^22\delta) \quad (9)$$

Une représentation graphique des variations de  $\gamma_c$  est fournie à la figure 2. Les paragraphes 2 et 3 sont consacrés à l'étude de la stabilité du massif lorsque les capacités de résistance sont décrites respectivement par les critères linéaires isotrope et anisotrope. Des calculs de stabilité à l'aide de la théorie du Calcul à la Rupture ont déjà été effectués dans le passé avec un critère linéaire isotrope par Salençon (1974) et Salençon et Matar (1982). Parmi les exemples d'emploi du Calcul à la Rupture pour un matériau cohérent cohérent anisotrope, il convient de citer les travaux de Salençon et Tristan-Lopez (1981).

Pour un massif constitué d'un matériau surconsolidé, le fait que la cohésion en surface ( $y=0$ ) ne soit plus nulle, contrairement au cas normalement consolidé, constitue une différence fondamentale pour la stabilité du massif. En traitant au paragraphe 4 le cas du critère homogène isotrope, l'objectif est d'examiner simplement les conséquences de l'hypothèse faite sur  $C(0)$ . Cette étude fournit une première approche pour la question de la stabilité d'un massif constitué d'un matériau surconsolidé.

## 2 - LE CRITÈRE LINÉAIRE ISOTROPE

Dans le cadre du critère de Tresca linéaire isotrope ( $\gamma_c = \text{constante}$ ), on commence par traiter le cas particulier de la houle linéaire (théorie de Stokes d'ordre 1), qui revêt une grande importance pratique. Puis l'on aborde la question de la stabilité du massif sous-marin soumis à une houle de forme quelconque. Enfin, les résultats ainsi dégagés sont appliqués à la détermination de  $K_2$ .

### 2.a la houle de Stokes d'ordre 1

La théorie de STOKES d'ordre 1 permet de modéliser la pression due à la houle sur le fond marin par une onde progressive sinusoïdale:

$$p(x,t) = p_0 \sin(kx - \omega t) \quad (10)$$

L'expression de  $p_0$  a été donnée en (I.29) en fonction des caractéristiques de la houle. Le choix du sinus à la place du cosinus de (I.29), plus commode dans les calculs à suivre, est licite en vertu de l'hypothèse d'invariance de la cohésion dans une translation horizontale. Les considérations présentées au paragraphe 1 conduisent à introduire le mode de chargement à un paramètre construit sur  $\text{vect}(\sin kx)$ . La question de la stabilité potentielle du massif peut alors être résolue en déterminant successivement le domaine  $K'_1$  dans  $\mathbb{R}$  des chargements  $p_0$  potentiellement supportables dans ce mode ; puis le domaine  $K_1 = \mathcal{H} \cap \mathcal{P}_n^{-1}(K'_1)$  dans  $\mathbb{R}^3$  des valeurs  $H, L, d$  définissant une houle de projet "potentiellement supportable". L'identification de  $K'_1$  sous la forme d'un intervalle  $[0, p_0^+]$  est effectuée en combinant les approches statique et cinématique du Calcul à la Rupture.

#### 2.a.1 Approche statique par l'intérieur de $K'_1$

Les composantes du tenseur des contraintes engendrées dans le demi-espace par le champ de pressions  $p_0 \sin kx$  ont été explicitées aux

équations (II.64) du Chapitre II dans le cas où le massif est constitué d'un matériau homogène isotrope élastique linéaire (h.i.l.e.). Cette solution élastique fournit un champ de contraintes particulier s.a. avec  $p$ . Pour qu'il soit compatible en tout point du milieu avec les capacités de résistance, il faut et il suffit que l'inégalité :

$$\left[ (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2 \right]^{1/2} \leq 2\gamma_c |y| \quad (11)$$

soit vérifiée pour toutes valeurs de  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}^-$ . Elle exprime que le diamètre du plus grand cercle de MOHR est majoré par  $2C$ . Cette condition peut être explicitée en utilisant les équations (II.64) dans (11).

$$(\forall y \in \mathbb{R}^-) \quad k p_0 \exp(ky) \leq \gamma_c \quad (12)$$

Par conséquent, pour les valeurs de  $p_0 \leq \gamma_c/k$ , le champ de contraintes élastiques s.a. avec  $p_0$  est compatible en tout point avec les capacités de résistance du matériau. Il en résulte que ces valeurs de  $p_0$  sont potentiellement supportables et donc :

$$p_0^+ \leq \frac{\gamma_c}{k} \quad (13)$$

On observera que, pour la valeur  $p_0 = \gamma_c/k$ , les points  $M$  pour lesquels le critère est saturé ( $f(\underline{\sigma}(M))=0$ ) sont situés en surface, c'est-à-dire pour  $y=0$ . On notera aussi que l'apparition du facteur  $\gamma_c/k$  pouvait être prévue par une analyse dimensionnelle du problème de stabilité.

### 2.a.2 Approche cinématique de $K'_1$

On considère le champ de vitesses  $\underline{V}$  représenté à la figure 3. Il met en jeu 2 paramètres géométriques :  $\alpha \in ]0, \pi/2[$  et  $h \in \mathbb{R}_+^*$ . Les deux blocs triangulaires  $OO'A$  et  $OO'B$  sont rigides en translation parallèlement à  $O'A$  et  $O'B$  respectivement. On a donc :

$$\begin{aligned}\underline{V}(OO'A) &= U(-\cos\alpha \underline{i} - \sin\alpha \underline{j}) \\ \underline{V}(OO'B) &= V(-\cos\alpha \underline{i} + \sin\alpha \underline{j})\end{aligned}\quad (14)$$

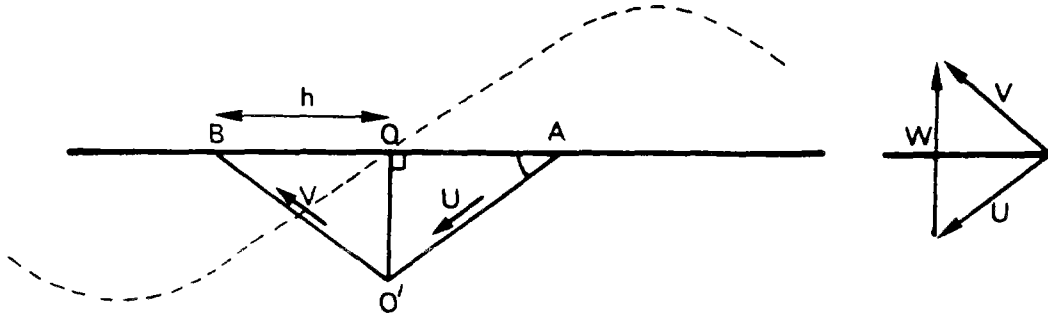


Figure 3 . Mécanisme à 2 blocs triangulaires centré en O

où U et V sont 2 scalaires positifs. De plus la vitesse est nulle en tout point situé en dehors du triangle ABO'. Les segments O'A, O'B et OO' constituent les lignes de discontinuités de ce champ de vitesses. Pour que la puissance résistante maximale  $P(\underline{V})$  du massif dans le champ  $\underline{V}$  soit finie, les discontinuités de vitesse le long de ces lignes doivent être tangentielles. Cette condition est vérifiée par construction pour le cas de O'A et O'B. En imposant la condition supplémentaire  $U=V$  dans (14), la discontinuité de vitesse  $\underline{W}$  entre les blocs OO'B et OO'A est parallèle à OO' :

$$\underline{W} = \underline{V}(OO'B) - \underline{V}(OO'A) = 2 U \sin \alpha \underline{j} \quad (15)$$

L'expression de la puissance résistante maximale est alors la suivante :

$$P(\underline{V}) = U \left\{ \int_{O'A} C(y) dl + \int_{O'B} C(y) dl + 2 \sin \alpha \int_{OO'} C(y) dl \right\} \quad (16)$$



c'est-à-dire, tous calculs effectués :

$$P(\underline{V}) = \gamma_c h^2 U \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot (1 + \sin^2 \alpha) \quad (17)$$

L'expression de la puissance des forces extérieures  $\mathcal{P}_{\text{ext}}$  dans le champ de vitesses considéré résulte de la définition du mode de chargement :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = Q \cdot \dot{q} = p_o \int_{0x} -v_y(x,0) \sin kx \, dx \quad (18)$$

En utilisant les équations (14) dans (18), il vient :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = p_o U \sin \alpha \left\{ \int_0^h \sin kx \, dx - \int_{-h}^0 \sin kx \, dx \right\} \quad (19)$$

soit encore

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = 2p_o U \sin \alpha \left( \frac{1 - \cos kh}{k} \right) \quad (20)$$

Le théorème cinématique permet d'affirmer que le chargement  $p_o$  n'est pas potentiellement supportable si  $\mathcal{P}_{\text{ext}} \geq P(\underline{V})$ . En explicitant cette inégalité à l'aide de (17) et (20), on déduit une majoration de  $p_o^+$  sous la forme suivante :

$$p_o^+ \leq \frac{\gamma_c}{k} \cdot \frac{(kh)^2}{2(1 - \cos kh)} \cdot \frac{1 + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \quad (21)$$

La valeur minimale du membre de droite de (21) lorsque  $\alpha$  décrit  $]0, \pi/2[$  et  $h$  décrit  $\mathbb{R}_+^*$  est obtenue par passage à la limite quand  $\alpha$  et  $h$  tendent vers 0. Il en résulte que :

$$p_o^+ \leq \frac{\gamma_c}{k} \quad (22)$$

Le champ de contraintes élastique d'une part, et la limite quand  $h$  et  $\alpha$  tendent vers 0 du mécanisme étudié d'autre part, forment donc une solution complète au sens du Calcul à la Rupture. On constate que le

meilleur mécanisme de la classe étudiée est évanescent au sens où la zone déformée tend vers l'unique point O lorsque h et  $\alpha$  tendent vers 0. Un résultat similaire a déjà été obtenu par Salençon (1974) pour la question de la capacité portante d'une fondation sur un massif constitué par un matériau défini par le même critère de rupture. Cette propriété du mécanisme optimal doit être manifestement attribuée à la condition  $C(0)=0$ .

Le théorème d'association s'applique à ce cas particulier au sens où le tenseur des contraintes élastique en O, qui n'est autre que le tenseur nul, est bien à la limite du critère de rupture. Cependant, en tout point du plan  $y=0$ , et en raison de l'hypothèse  $C(0)=0$ , le domaine des états de contraintes admissibles dans l'espace des contraintes principales se réduit à la trissectrice d'équations  $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$ . Un champ de contraintes compatible avec les capacités de résistance est donc nécessairement à la limite du critère en tout point du plan  $y=0$  où les états de contraintes sont donc purement sphériques. Cette observation fournit un résultat plus fort que celui obtenu par le théorème d'association.

### 2.a.3 Détermination du domaine $K_1$

Le domaine  $K'_1$  étant identifié, il est possible de déterminer l'ensemble  $K_1 = \mathcal{H} \cap \mathcal{P}_1^{-1}(K'_1)$  des valeurs de H, L et d définissant une houle de projet potentiellement supportable.

Pour la houle de Stokes d'ordre 1, l'application  $\mathcal{P}_1$  qui a été introduite au Chapitre I est définie de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$  et associe au triplet (H,L,d) l'amplitude du signal sinusoidal de pressions:

$$\mathcal{P}_1(H,L,d) = p_o = \frac{\gamma_w H}{2ch(2\pi \frac{d}{L})} \quad (23)$$

$\mathcal{P}_1^{-1}(K'_1)$  est donc l'ensemble des triplets (H,L,d) qui satisfont la

condition :

$$\frac{H}{L} \leq \frac{1}{\pi} \frac{\gamma_c}{\gamma_w} \operatorname{ch}\left(2\pi \frac{d}{L}\right) \quad (24)$$

D'autre part,  $\mathcal{H}$  rassemble par définition les valeurs possibles de  $(H, L, d)$  c'est-à-dire celles qui satisfont la condition de non déferlement:

$$\frac{H}{L} \leq \frac{1}{7} \operatorname{th}\left(2\pi \frac{d}{L}\right) \quad (25)$$

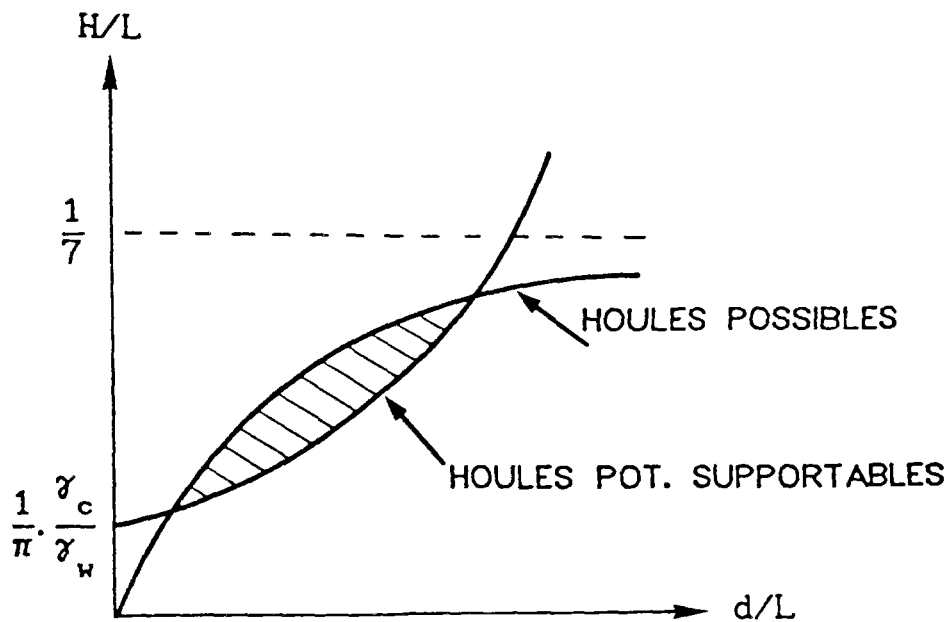


Figure 4. Schéma de principe du domaine  $K_1$  dans le plan  $(\frac{d}{L}, \frac{H}{L})$

Pour qu'une houle de projet soit potentiellement supportable, il est nécessaire et suffisant que les relations (24) et (25) soient vérifiées simultanément. C'est la raison pour laquelle il est commode de représenter le domaine  $K_1$  dans l'espace  $(d/L, H/L)$ . Dans cet espace, le domaine  $\mathcal{H}$  (resp.  $\mathcal{P}_1^{-1}(K'_1)$ ) correspond à l'ensemble des points situés au-dessous de la fonction concave (resp. convexe) de la figure 4. Les valeurs possibles de  $(H, L, d)$  non potentiellement supportables occupent

le domaine hachuré sur ce schéma, dont l'ampleur décroît lorsque le gradient de cohésion  $\gamma_c$  augmente. En particulier, il existe une valeur critique  $\gamma_c^*$  de  $\gamma_c$  au-delà de laquelle toute houle possible  $((H, L, d) \in \mathcal{H})$  est potentiellement supportable. Le calcul fournit :

$$\gamma_c^* = 0,225 \gamma_w = 2,25 \text{ kN/m}^3 \quad (26)$$

La condition  $\gamma_c^* \geq \gamma_c$  définit donc un critère de stabilité (potentielle) inconditionnelle, c'est-à-dire vis-à-vis de la houle la plus défavorable. Mais ce critère dépend naturellement de la modélisation adoptée pour la houle (en l'occurrence, la théorie de STOKES d'ordre 1). On reviendra sur ce point lors de l'étude de  $K_2$ . La figure 5 fournit le domaine des houles de projet potentiellement supportables pour différentes valeurs du gradient de cohésion  $\gamma_c$  de la forme  $\frac{n}{9} \gamma_c^*$  pour  $n \in \{1, \dots, 9\}$ .

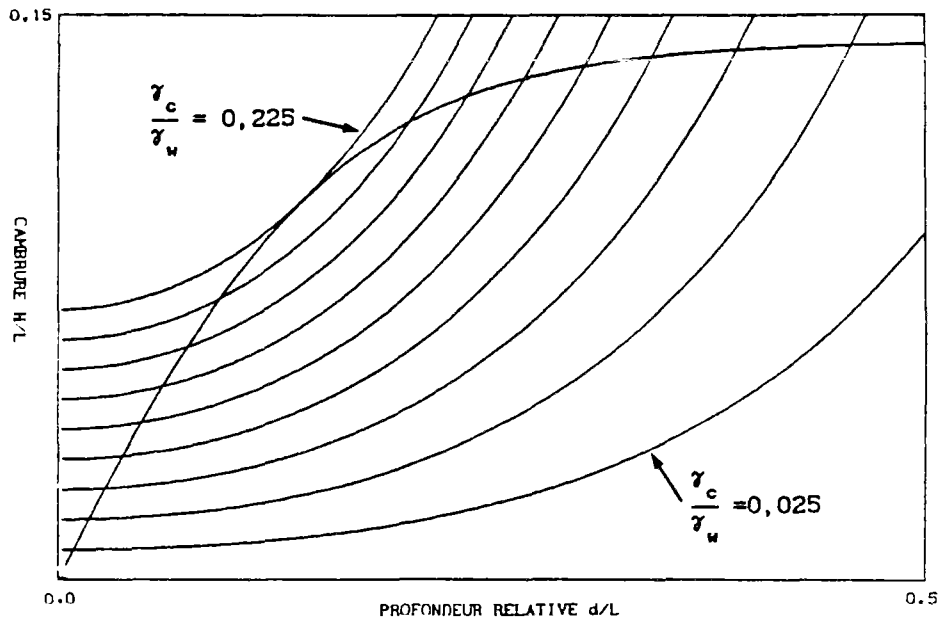


Figure 5. Représentation de  $K_1$  dans le plan  $(\frac{d}{L}, \frac{H}{L})$  pour différentes valeurs de  $\gamma_c/\gamma_w$

## 2.b stabilité sous une houle de forme quelconque

On examine successivement la stabilité d'un massif horizontal puis d'un massif incliné sous l'action d'une houle de forme quelconque.

### 2.b.1 Le cas du fond marin horizontal

On se donne une fonction  $p_h$  numérique de la variable réelle . Elle est supposée  $C^1$  par morceaux. Dans le cas d'un fond marin horizontal, cette fonction permet de définir un mode de chargement à un paramètre  $\lambda$ . A la valeur  $\lambda$  du paramètre de chargement correspond un champ de surpressions  $\lambda p_h(.)$  sur le fond marin. Il s'agit de déterminer des approches par l'intérieur et l'extérieur du domaine  $K=[-\lambda^+, \lambda^+]$  des chargements  $\lambda$  potentiellement supportables, sans particulariser la fonction  $p_h$ . Les résultats obtenus seront ensuite généralisés au cas d'un fond marin plan incliné.

#### 2.b.1.1 Une condition de continuité sur $p_h(.)$

Soit  $p_h(.)$  une fonction de forme de pressions sur le fond marin supposée  $C^1$  par morceaux. On va montrer que la continuité de  $p_h(.)$  est une condition nécessaire pour que  $\lambda^+$  soit non nul.

On suppose donc que  $p_h(.)$  présente une discontinuité en  $x_0$ . Il existe un ouvert  $I$  contenant  $x_0$  tel que cette fonction soit continue et dérivable en tout point de  $I-\{x_0\}$ . On note  $p_h(x_0^+)$  et  $p_h(x_0^-)$  les valeurs prises par  $p_h$  respectivement à droite et à gauche. On étudie l'équilibre du massif soumis à  $\lambda p_h(.)$ .

Soit  $\underline{g}$  un champ de contraintes s.a. avec  $\lambda$ . On considère le demi-disque de centre  $M(x_0, 0)$  et de rayon  $\varepsilon > 0$ , représenté à la figure 6. Le moment  $M_r$  en  $M$  des vecteurs-contraintes  $\underline{g} \cdot \underline{n}$  s'exerçant sur l'arc  $AB$  équilibre le moment  $M_m$  des forces de pressions s'exerçant sur l'intervalle  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ . On a donc :

$$\begin{aligned}
M_r &= \varepsilon \int_{AB} \tau \, dl = \varepsilon^2 \int_0^\pi \tau \, d\theta \\
M_m &= -\lambda \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} u \, p_h(x_o + u) \, du \\
M_r &= M_m
\end{aligned} \tag{27}$$

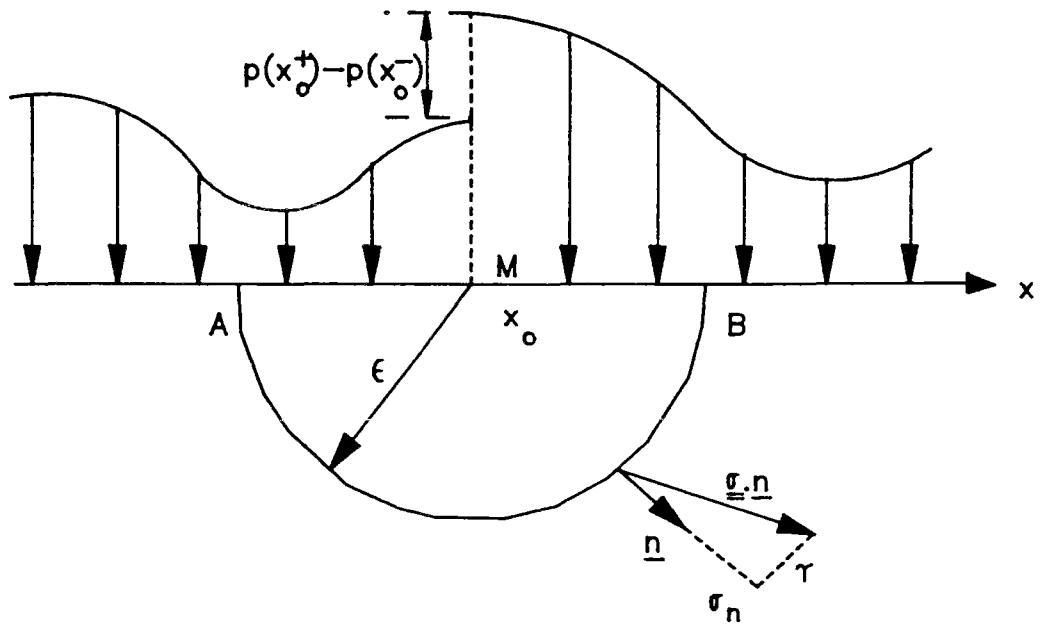


Figure 6. Demi-disque soumis à un champ de pressions discontinu en 0

Si l'on suppose que  $\underline{\sigma}$  est compatible en tout point avec les capacités de résistance du matériau, on dispose d'une condition supplémentaire sur  $\underline{\sigma}$  :  $|\tau| \leq C$ . Il en résulte une majoration de  $|M_r|$  :

$$|M_r| \leq \varepsilon^2 \int_0^\pi \gamma_c |y| \, d\theta = \gamma_c \varepsilon^3 \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta = 2 \gamma_c \varepsilon^3 \tag{28}$$

L'inégalité (28) permet d'affirmer que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{M_r}{\varepsilon^2} = 0 \quad (29)$$

En faisant un développement limité de  $p_h$  au premier ordre à droite et à gauche de  $x_o$ , il est facile de vérifier que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{M_m}{\varepsilon^2} = \lambda \frac{p_h(x_o^+) - p_h(x_o^-)}{2} \quad (30)$$

L'égalité de  $M_m$  et  $M_r$  pour toute valeur de  $\varepsilon$  impose l'égalité des limites calculées en (29) et (30). Comme  $p_h$  est discontinue en  $x_o$ , il en résulte que  $\lambda$  doit être nul. Une fonction de pressions discontinue n'est donc pas potentiellement supportable par le massif.

Naturellement, pour les modélisations usuelles de la houle une régularité plus forte que la simple continuité est en général assurée. Cependant, on verra au paragraphe 2.b.1.5 un exemple qui fera appel au résultat qui vient d'être établi.

#### 2.b.1.2 Une approche cinématique

Soit M un point de la surface ( $y=0$ ) pour lequel la fonction  $p_h$  est dérivable. Son abscisse est notée  $a$ . Une approche cinématique pour le problème de la houle de forme quelconque consiste à généraliser l'utilisation du mécanisme à 2 blocs rigides introduit pour l'étude de la houle de Stokes d'ordre 1 (voir figure 7). Les vitesses de translation des blocs sont définies respectivement par:

$$\begin{aligned} \underline{V}(MM'A) &= sU(-\underline{i}\cos \alpha - \underline{j}\sin \alpha) \\ \underline{V}(MM'B) &= sU(-\underline{i}\cos \alpha + \underline{j}\sin \alpha) \end{aligned} \quad (31)$$

où  $s = +1$  (resp.  $s = -1$ ) correspond à un mécanisme de glissement de blocs vers les  $x < 0$  (resp. vers les  $x > 0$ ). La puissance résistante maximale  $P(\underline{V})$  est naturellement inchangée. Elle a été donnée en (17).

Par ailleurs, l'expression de la puissance du chargement dans le mécanisme étudié résulte de la définition du mode de chargement :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}} = \lambda \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} -V_y(x,0) p_h(x) dx \quad (32)$$

En explicitant  $V_y(x,0)$  à l'aide de (31), il vient :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = \lambda s U \sin \alpha f(h) \quad (33)$$

où l'on a posé :

$$f(h) = \int_a^{a+h} p_h(x) dx - \int_{a-h}^a p_h(x) dx \quad (34)$$

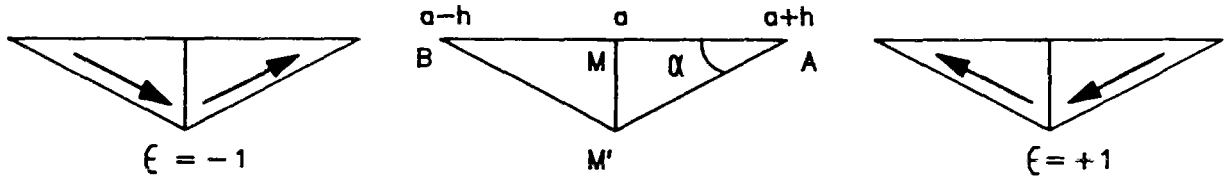


Figure 7. Généralisation du mécanisme à 2 blocs triangulaires

Il est facile de voir que  $f(0)=f'(0)=0$  et  $f''(0)=2p'_h(a)$ . Il en résulte un développement limité au second ordre de  $f$  sous la forme :

$$f(h) = h^2 p'_h(a) + h^2 g(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} g(h) = 0 \quad (35)$$

En utilisant (17), (33) et (35), le théorème cinématique fournit une majoration de  $\lambda^+$ .

$$\lambda^+ \leq \gamma_c \cdot \frac{1+\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{1}{|p'_h(a)+g(h)|} \quad (36)$$

La majoration la plus restrictive, à  $h$  donné, est obtenue lorsque  $\alpha \rightarrow 0$ . En remplaçant de plus le membre de droite de (36) par sa limite quand  $h \rightarrow 0$ , il vient :



$$\lambda^+ \leq \frac{\gamma_c}{|p'_h(a)|} \quad (37)$$

La fonction  $p_h$  étant  $C^1$  par morceaux, il existe un ensemble au plus dénombrable de points où  $p_h$  n'est pas dérivable. Soit donc  $x$  un tel point et  $I$  un intervalle ouvert contenant  $x$ , tel que  $p_h$  soit  $C^1$  sur  $I - \{x\}$ . On note

$$p'_h(x^+) = \lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a > x}} p'_h(a) \quad (38)$$

$$p'_h(x^-) = \lim_{\substack{a \rightarrow x \\ a < x}} p'_h(a)$$

Par définition,  $p_h$  est dérivable à droite (resp. à gauche) si la limite  $p'_h(x^+)$  (resp.  $p'_h(x^-)$ ) existe. La majoration (37) étant valable pour tous les points de  $I - \{x\}$ , il apparaît que seule la valeur  $\lambda=0$  est potentiellement supportable si  $p_h$  n'est pas dérivable à la fois à droite et à gauche de  $x$ . Cette observation vient compléter la conclusion du paragraphe 2.b.1.1 : étant donnée une fonction  $p_h(.)$   $C^1$  par morceaux, pour que  $\lambda^+$  soit non nul, il est nécessaire que la fonction  $p_h$  soit continue, et que les discontinuités de  $p'_h$  soient de première espèce. Posant

$$F_h(x) = \sup\{|p'_h(x^+)|, |p'_h(x^-)|\} \quad (39)$$

L'inégalité (37) peut être généralisée en tout point :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \lambda^+ \leq \frac{\gamma_c}{F_h(x)} \quad (40)$$

soit encore

$$\lambda^+ \leq \frac{\gamma_c}{\sup_{x \in \mathbb{R}} F_h(x)} \quad (41)$$

Une illustration immédiate de (41) est fournie par le cas de la houle de Stokes d'ordre 1. Pour  $p_h(x) = \cos kx$ , on vérifie que  $\sup_{a \in \mathbb{R}} |p'_h(a)| = k$ , ce qui permet de retrouver la majoration  $\lambda^+ \leq \gamma_c/k$  déjà établie au paragraphe 2.a.2.

Il est intéressant d'exprimer le résultat obtenu par l'approche cinématique sans faire référence explicite au formalisme de mode de chargement : si l'on considère une fonction de pression  $p_h(.)$  de forme quelconque, et que l'on définit la fonction  $F_h(.)$  à partir de  $p_h(.)$  comme en (39), la stabilité du fond marin soumis à  $p_h(.)$  impose que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^h} F_h(x) \leq \gamma_c \quad (42)$$

### 2.b.1.3 Approche statique par l'intérieur

Comme cela a été fait pour la houle de STOKES d'ordre 1, il est possible d'obtenir un champ de contraintes statiquement admissible avec le chargement défini par  $\lambda$  en ayant recours à la solution du problème aux limites dans le cas où le massif est constitué par un matériau h.i.l.e. incompressible. Cette solution est construite sous certaines hypothèses au Chapitre II. Pour simplifier on suppose dans ce paragraphe que la fonction  $p_h(.)$  est  $C^2$  à support compact. On rappelle que le champ de contraintes "élastique" est construit à partir de la solution  $u_h$  du problème suivant:

$$\begin{aligned} \Delta u_h &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^- \\ u_h(x, 0) &= p_h(x) \\ \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} u_h &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

Le tenseur  $\underline{\underline{\sigma}}_h^{el}(M)$  des contraintes élastiques au point  $M(x,y)$  est alors défini par sa matrice  $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}_h^{el}$  dans la base  $(\underline{i}, \underline{j})$  de la manière suivante :

$$\hat{\underline{\underline{\sigma}}}_h^{el} = \begin{bmatrix} -u_h - y \frac{\partial u_h}{\partial y} & y \frac{\partial u_h}{\partial x} \\ y \frac{\partial u_h}{\partial x} & -u_h + y \frac{\partial u_h}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (44)$$

Le champ de contraintes  $\lambda \underline{\underline{\sigma}}_h^{el}$  est manifestement statiquement admissible avec  $\lambda p_h(.)$ . Une approche par l'intérieur de K est obtenue en

déterminant les valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles  $\lambda \sigma_h^{e1}$  est compatible en tout point de  $\Omega$  avec les capacités de résistance du matériau. En utilisant la forme particulière de  $\sigma_h^{e1}$  donnée en (44) cette condition de compatibilité s'écrit :

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^-) \quad 2\lambda |y| \left[ \left( \frac{\partial u_h}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_h}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} \leq 2 \gamma_c |y| \quad (45)$$

Une minoration de  $\lambda^+$  résulte immédiatement de (45) :

$$\lambda^+ \geq \frac{\gamma_c}{\sup_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^-} \|\text{grad } u_h\|} \quad (46)$$

On introduit maintenant la fonction  $H = \frac{\partial u_h}{\partial y} + i \frac{\partial u_h}{\partial x}$ . La fonction  $u_h$  étant harmonique,  $H$  est une fonction holomorphe dans le demi-plan. Par ailleurs, il est facile de voir que :

$$\|\text{grad } u_h\| = |H| \quad (47)$$

On note de plus  $C_R$  et  $D_R$  respectivement le demi-cercle et la demi-disque de centre 0 et de rayon  $R$  :

$$\begin{aligned} C_R &= \left\{ (x,y) ; \sqrt{x^2+y^2} = R, y \leq 0 \right\} \\ D_R &= \left\{ (x,y) ; \sqrt{x^2+y^2} \leq R, y \leq 0 \right\} \end{aligned} \quad (48)$$

La fonction  $p_h(x)$  étant à  $C^2$  à support compact, on peut utiliser les résultats du Chapitre II relatifs au problème  $B_2$  : la quantité  $S = \sup_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^-} \|\text{grad } u_h\|$  est donc définie et l'on peut montrer qu'il est possible de trouver un réel  $R$  pour lequel :

$$(\forall M \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^- \setminus D_R) \quad \|\text{grad } u_h(x,y)\| \leq S/2 \quad (49)$$

Il en résulte que la valeur maximale de  $\|\text{grad } u_h\|$  dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$  est atteinte dans  $D_R$ . Or  $H$  étant holomorphe, le "principe du maximum" permet d'affirmer que la valeur maximale de  $|H|$  et donc de  $\|\text{grad } u_h\|$  est nécessairement atteinte sur la frontière  $\partial D_R$  de  $D_R$ :

$$\partial D_R = C_R \cup [-R, +R] \times \{0\} \quad (50)$$

En raison de la condition (49), la valeur maximale de  $\|\text{grad } u_h\|$  ne saurait être atteinte sur  $C_R$ . Il en résulte qu'elle est nécessairement atteinte en un point du fond marin :

$$S = \sup_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^-} \|\text{grad } u_h\| = \sup_{\mathbb{R} \times \{0\}} \|\text{grad } u_h\| \quad (51)$$

L'égalité (51) constitue une grande simplification dans la détermination du minorant de  $\lambda^+$  fourni par (46), puis qu'il suffit maintenant d'examiner les valeurs prises par  $\|\text{grad } u_h\|$  sur la frontière du demi-espace. L'avantage essentiel de ce résultat réside dans le fait que le calcul de  $S$  ne nécessite pas la résolution de (43). En effet, on vérifie immédiatement que :

$$\frac{\partial u_h}{\partial x}(a, 0) = p'_h(a) \quad (52)$$

De plus, on peut montrer (voir Annexe 2) que :

$$\frac{\partial u_h}{\partial y}(a, 0) = \frac{1}{\pi} \text{vp}_x \frac{1}{x} (p'_h(a+)) \quad (53)$$

où  $\text{vp}_x \frac{1}{x}$  désigne la distribution dite "valeur principale de Cauchy" définie par:

$$(\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})) \quad \text{vp}_x \frac{1}{x}(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \quad (54)$$

Les égalités (52) et (53) permettent le calcul de S et donc du minorant de  $\lambda^+$  fourni par (46) directement à partir de la donnée  $p'_h(\cdot)$ . Il vient :

$$\lambda^+ \geq \frac{\gamma_c}{\sup_{a \in \mathbb{R}} \left[ (p'_h(a))^2 + \left( \frac{1}{\pi} \text{vp}_{\frac{1}{x}}(p'_h(a+)) \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (55)$$

A titre d'illustration, il est intéressant d'appliquer (55) pour retrouver le résultat établi par l'approche statique dans le cas de la houle de Stokes d'ordre 1. La fonction de forme est ici  $p_h(x) = \cos kx$ . Par définition de  $\text{vp}_{\frac{1}{x}}$  :

$$\text{vp}_{\frac{1}{x}}(\sin k(x+)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|u| \geq \varepsilon} \frac{\sin(kx+ku)}{u} du \quad (56)$$

Les fonctions  $\frac{\sin ku}{u}$  et  $\frac{\cos ku}{u}$  étant respectivement paire et impaire, il est facile de voir que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|u| \geq \varepsilon} \frac{\sin(kx+ku)}{u} du = 2 \cos(kx) \int_0^{\infty} \frac{\sin(ku)}{u} du \quad (57)$$

De (57), il résulte la valeur de  $\text{vp}_{\frac{1}{x}}(\sin(k(x+)))$  :

$$\text{vp}_{\frac{1}{x}}(\sin(k(x+))) = \pi \cos(kx) \quad (58)$$

Pour le cas particulier de la houle de Stokes d'ordre 1, il apparaît donc que  $\|\text{grad } u_h\|$  est constant et égal à k sur toute la frontière du demi-espace  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ . La minoration (55) prend donc la forme déjà établie au paragraphe 2.a.1 :

$$\lambda^+ \geq \frac{\gamma_c}{k} \quad (59)$$

L'avantage du présent calcul sur celui qui a été effectué précédemment

réside dans le fait qu'il n'a pas fait appel à l'expression explicite du champ de contraintes élastique statiquement admissible avec  $p_h(.)$ , ni d'ailleurs à la solution du problème (43). Il a pu être effectué à partir de la seule connaissance de  $p_h$ .

Encore une fois, il est intéressant d'exprimer le résultat de ce paragraphe sans faire référence explicite au concept de mode de chargement. Considérant une pression  $p_h(.)$  s'appliquant sur le fond marin, la condition

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left[ (p'_h(a))^2 + \left( \frac{1}{\pi} \nu p'_x(p'_h(a+)) \right)^2 \right]^{1/2} \leq \gamma_c \quad (80)$$

assure la stabilité potentielle du massif soumis à  $p(.)$ .

Même si l'emploi de (41) et (55) dans le cas de la houle de Stokes d'ordre 1 fournit la valeur exacte de  $\lambda^+$ , dans le cas général les majorant et minorant de  $\lambda^+$  introduits par ces équations sont différents. Cette constatation a conduit à développer une autre approche statique par l'intérieur. Elle repose sur un champ de contraintes discontinu qui est utilisé à plusieurs reprises dans des applications ultérieures.

#### 2.b.1.4 Approche statique par un champ de contraintes discontinu

Si l'on fait l'hypothèse que l'instabilité du massif sous-marin sous le chargement de la houle est un phénomène qui apparaît tout d'abord en surface, il est naturel de "faire confiance" à la valeur par excès de  $\lambda^+$  donnée par la condition (41). C'est l'idée qui prévaut dans la construction d'une deuxième approche par l'intérieur, basée sur un champ de contraintes  $\underline{\sigma}^0$  sans rapport avec la théorie de l'Elasticité. Il est défini sous réserve que  $p_h$  soit 2 fois dérivable. Ses composantes dans la base  $(\underline{i}, \underline{j})$  s'expriment en fonction de  $p_h(.), p'_h(.), p''_h(.)$  et d'un réel  $\alpha > 0$  arbitraire :

$$\begin{array}{ll}
y > -\alpha & y < -\alpha \\
\sigma_{xx}^0 = -p_h(x) & \sigma_{xx}^0 = 0 \\
\sigma_{xy}^0 = yp_h'(x) & \sigma_{xy}^0 = -\alpha p_h'(x) \\
\sigma_{yy}^0 = -p_h(x) - \frac{y^2}{2} p_h''(x) & \sigma_{yy}^0 = -p_h(x) + \alpha(\frac{\alpha}{2} + y) p_h''(x)
\end{array} \quad (61)$$

Le champ de contraintes  $\lambda \sigma^0$  est manifestement s.a. avec  $\lambda p_h(\cdot)$ . Les conditions à vérifier par  $\lambda$  pour que  $\lambda \sigma^0$  soit compatible en tout point du massif avec les capacités de résistance sont les suivantes :

$$\begin{array}{l}
y > -\alpha : \lambda \leq \frac{\gamma_c}{\sup_{x \in \mathbb{R}} |p_h'(x)| \sqrt{1 + \alpha^2 16 \cdot (p_h''(x)/p_h'(x))^2}} \\
(\forall y < -\alpha) : \lambda \leq \frac{\gamma_c |y|/\alpha}{\sup_{x \in \mathbb{R}} |p_h'(x)| \sqrt{1 + 1/4 \alpha^2 \cdot [p_h(x)/p_h'(x) - \alpha(\frac{\alpha}{2} + y) p_h''(x)/p_h'(x)]^2}}
\end{array} \quad (62)$$

En choisissant judicieusement le paramètre  $\alpha$ , on peut espérer que le facteur de  $\gamma_c / \sup_{x \in \mathbb{R}} |p_h'(x)|$  dans chacune des deux expressions précédentes soit peu différent de 1. On verra que c'est bien ce qui se passe dans le cas de la houle de STOKES d'ordre 2.

#### 2.b.1.5 Une approche statique par l'extérieur

##### *Exposé de la méthode*

Pour obtenir un majorant de  $\lambda^+$ , la démarche classique consiste à recourir au théorème cinématique, comme cela a été fait au paragraphe 2.b.1.2. A priori, on peut également tenter de mettre en oeuvre le raisonnement statique par l'extérieur comme au 2.b.1.1. Dans son principe, il s'agit d'examiner l'ensemble des champs de contraintes statiquement admissibles avec les données en efforts, en vue de dégager une condition portant sur le chargement pour qu'aucun de ces

champs ne soit compatible avec les capacités de résistance. Ainsi décrit, ce procédé consiste donc à tenter de mettre en oeuvre l'idée brute du Calcul à la Rupture sans recourir au théorème cinématique. Dans le cas général du milieu continu, la mise en oeuvre de cette approche est délicate, car on est évidemment le plus souvent dans l'impossibilité de passer en revue tous les champs de contraintes s.a. avec un chargement donné. Toutefois, pour le problème particulier envisagé, elle va permettre de retrouver simplement la majoration (41).

On note comme précédemment  $S$ , l'espace des champs de contraintes statiquement admissibles dans le mode défini par  $\text{vect}(p_h)$ , et  $L$  l'application linéaire de  $S$  dans  $R$ , qui à un champ  $\underline{\sigma}$  de  $S$  associe l'amplitude  $\lambda$  qu'il équilibre. Soit  $M$  le point d'abscisse  $x$  situé à la surface du fond marin. On considère le demi-disque  $\Omega_\varepsilon$  de centre  $M$  et de rayon  $\varepsilon$  :

$$\Omega_\varepsilon = \left\{ P \in \Omega, \|MP\| < \varepsilon \right\} \quad (63)$$

et l'on note  $H_\varepsilon$  (resp.  $H$ ) l'ensemble des éléments de  $S$  compatibles dans  $\Omega_\varepsilon$  (resp.  $\Omega$ ) avec les capacités de résistance. On observe d'abord que  $H = \bigcap_{\varepsilon > 0} H_\varepsilon$ . D'autre part, les ensembles  $\Omega_\varepsilon$  étant ordonnés par ordre croissant au sens de l'inclusion pour des valeurs croissantes de  $\varepsilon$ , les ensembles  $H_\varepsilon$  sont donc ordonnés dans le sens contraire et l'on peut ainsi définir  $H_0$  :

$$H_0 = \bigcup_{\varepsilon > 0} H_\varepsilon = \left\{ \underline{\sigma} \in S, (\exists \varepsilon > 0) (\forall P \in \Omega_\varepsilon) f(\underline{\sigma}(P)) \leq 0 \right\} \quad (64)$$

Il s'agit de l'ensemble des éléments de  $S$  compatibles avec les capacités de résistance du matériau au moins dans un voisinage du point  $M$ .  $H_0$  contient manifestement  $H$ . Le domaine  $K_0 = L(H_0)$  constitue donc une approche par l'extérieur du domaine  $K = L(H)$  des chargements potentiels supportables. L'intérêt de cette construction réside dans le fait que  $K_0$  peut être déterminé directement, c'est-à-dire à partir de la connaissance de  $H_0$ . En effet, soit un champ de contraintes  $\underline{\sigma} \in S$ .



Alors il existe un réel  $\lambda$  pour lequel :

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}) \quad \sigma_{xy}(\alpha, 0) = 0 ; \quad \sigma_{yy}(\alpha, 0) = -\lambda p_h(\alpha) \quad (65)$$

Si de plus  $\underline{\sigma} \in H_0$ , alors il existe un réel  $\varepsilon > 0$  tel que :

$$(\forall P \in \Omega_\varepsilon) \quad f(\underline{\sigma}(P)) \leq 0 \quad (66)$$

Comme on l'a souligné à la fin du paragraphe 2.a.2, la condition (66) écrite aux points de  $\Omega_\varepsilon \cap \partial\Omega$  en tenant compte de la propriété  $C(0) = 0$  impose que le tenseur des contraintes soit sphérique en tout point de cet intervalle. En notant  $I_\varepsilon = ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$  :

$$(\forall \alpha \in I_\varepsilon) \quad \sigma_{xx}(\alpha, 0) = -\lambda p_h(\alpha) \quad (67)$$

L'ensemble des points de  $I_\varepsilon$  où  $\underline{\sigma}$  et  $p_h$  ne sont pas dérivables est discret. On note  $I'_\varepsilon$  son complémentaire dans  $I_\varepsilon$ , qui est dense dans  $I_\varepsilon$ . En utilisant conjointement (65), (67) et les équations de champ vérifiées par  $\underline{\sigma}$ , on observe d'abord que :

$$(\forall \alpha \in I'_\varepsilon) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}(\alpha, 0) = -\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}(\alpha, 0) = \lambda p'_h(\alpha) \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}(\alpha, 0) = -\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}(\alpha, 0) = 0 \end{cases} \quad (68)$$

Le développement limité au premier ordre par rapport à  $y$  de  $\sigma_{xy}(\alpha, y)$  et  $\sigma_{yy}(\alpha, y)$  au voisinage du point  $(\alpha, 0)$  de  $\Omega_\varepsilon \cap \partial\Omega$  est donc indépendant du choix de contraintes  $\underline{\sigma} \in H_0 \cap L^{-1}(\lambda)$  :

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}(\alpha, y) &= \lambda y p'_h(\alpha) + y \beta_{xy}(\alpha, y) \\ \sigma_{yy}(\alpha, y) &= -\lambda p_h(\alpha) + y \beta_{yy}(\alpha, y) \end{aligned} \quad (69)$$

où les fonctions  $\beta_{xy}(\alpha, y)$  et  $\beta_{yy}(\alpha, y)$  vérifiant la condition :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \beta_{xy}(\alpha, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \beta_{yy}(\alpha, y) = 0 \quad (70)$$

En revanche, la valeur de  $\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y}(\alpha, 0)$  reste indéterminée :

$$\sigma_{xx}(\alpha, y) = -\lambda p_h(\alpha) + y \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y}(\alpha, 0) + y \beta_{xx}(\alpha, y) \quad \text{avec} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \beta_{xx}(\alpha, y) = 0 \quad (71)$$

On note encore  $D = (I_\varepsilon - I'_\varepsilon) \times \{0\}$ , l'ensemble des points de l'espace où  $p_h$  n'est pas dérivable. En explicitant les conditions (66) pour les points de  $\Omega_\varepsilon - D$  à l'aide des relations (69) et (71), il vient :

$$\left\{ \left[ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y}(\alpha, 0) + \beta_{xx}(\alpha, y) - \beta_{yy}(\alpha, y) \right]^2 + 4 \left[ \lambda p'_h(\alpha) + \beta_{xy}(\alpha, y) \right]^2 \right\}^{1/2} \leq 2\gamma_c \quad (72)$$

En tenant compte de (70), il est facile de vérifier que (72) impose :

$$(\forall \alpha \in I'_\varepsilon) \quad |\lambda| \leq \frac{\gamma_c}{|p'_h(\alpha)|} \quad (73)$$

Comme la fonction  $p'_h$  est continue par morceaux et que  $I'_\varepsilon$  est dense dans  $I_\varepsilon$ , la condition (73) est en fait vraie en tout point de  $I_\varepsilon$ , quitte à remplacer  $p'_h(\alpha)$  par  $F_h(\alpha) = \sup(|p'_h(\alpha^-)|, |p'_h(\alpha^+)|)$  si  $p_h$  n'est pas dérivable en  $\alpha$  :

$$(\forall \alpha \in I_\varepsilon) \quad |\lambda| \leq \frac{\gamma_c}{F_h(\alpha)} \quad (74)$$

En particulier, il faut que  $|\lambda| \leq \gamma_c / |F_h(x)|$ . Cette propriété devant être assurée pour tout réel  $\lambda$  image par  $L$  d'un élément de  $H_0$ , il en résulte que :

$$K_0 = L(H_0) \subset J_x = [-\gamma_c / |F_h(x)|; \gamma_c / |F_h(x)|] \quad (75)$$

Puisque  $K_0$  contient  $K$ , le segment  $J_x$  constitue donc une approche par l'extérieur de  $K$ . Elle est formellement équivalente à la majoration (40). Mais il faut noter qu'elle a pu être établie par un raisonnement

purement statique, puisque le calcul effectué repose sur la définition même de  $K_0$  comme image par  $L$  de  $H_0$  : tous les champs de contraintes s.a. dans le mode et compatibles avec les capacités de résistance du matériau au voisinage d'un point donné de la surface ont été examinés.

Afin de compléter la connaissance de  $K_0$ , on va maintenant établir l'inclusion de (75) dans l'autre sens dans le cas où la fonction  $p_h$  est 2 fois dérivable dans un voisinage de  $x$ . On aura ainsi établi que  $K_0 = J_x$  et prouvé de la sorte que  $J_x$  est la meilleure approche par l'extérieur de  $K$  que puisse fournir le raisonnement statique proposé. Pour cela, on considère le champ de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}^0$  dont la représentation matricielle  $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}^0$  dans la base  $(\underline{i}, \underline{j})$  est donnée par :

$$\hat{\underline{\underline{\sigma}}}^0 = \begin{bmatrix} -p_h(\alpha) & yp'_h(\alpha) \\ yp'_h(\alpha) & -p_h(\alpha) - \frac{y^2}{2} p''_h(\alpha) \end{bmatrix} \quad (76)$$

Il est facile de voir que  $\underline{\underline{\sigma}}^0 \in S$ . Pour que  $\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \underline{\underline{\sigma}}^0$  soit élément de  $H_0$ , il suffit qu'il existe un réel  $\varepsilon > 0$  tel que :

$$(\forall p(\alpha, y) \in \Omega_\varepsilon) \quad |\lambda| \cdot \left[ (p'_h(\alpha))^2 + \frac{y^2}{16} (p''_h(\alpha))^2 \right]^{1/2} \leq \gamma_c \quad (77)$$

On pose :

$$F_1(\varepsilon) = \sup_{\alpha \in I_\varepsilon} |p'_h(\alpha)| \quad \text{et} \quad F_2(\varepsilon) = \sup_{\alpha \in I_\varepsilon} |p''_h(\alpha)| \quad (78)$$

Avec ces notations, pour que la condition (77) soit assurée, il suffit que :

$$|\lambda| \cdot \left[ (F_1(\varepsilon))^2 + \frac{\varepsilon^2}{16} (F_2(\varepsilon))^2 \right]^{1/2} \leq \gamma_c \quad (79)$$

Soient  $\lambda_n^+$  (resp.  $\lambda_n^-$ ) les suites définies par :

$$\lambda_n^{\pm} = \frac{\pm \gamma_c}{[F_1(\frac{1}{n})^2 + (F_2(\frac{1}{n})/4n)^2]^{1/2}} \quad (80)$$

Par construction,  $\lambda_n^{\pm} \sigma^0 \in H_{1/n} \subset H_0$ . Il en résulte que  $\lambda_n^{\pm} \in L(H_0) = K_0$ . Sous réserve que  $p'_h(x) \neq 0$ , il est facile de voir que la suite  $\lambda_n^+$  (resp.  $\lambda_n^-$ ) converge vers  $\lambda^+$  (resp.  $\lambda^-$ ) défini par :

$$\lambda^{\pm} = \frac{\pm \gamma_c}{|p'_h(x)|} \quad (81)$$

La convexité du critère permet alors d'affirmer que :

$$[-\gamma_c/|p'_h(x)| ; \gamma_c/|p'_h(x)|] \subset K_0 = L(H_0) \quad (82)$$

ce qui achève de déterminer complètement  $K_0$  par une analyse de type statique.

#### *Commentaires sur l'approche statique par l'extérieur*

Etant dans l'impossibilité de déterminer  $K$  exactement par une méthode statique, on a en fait recherché un sous-domaine  $\Omega_0$  de  $\Omega$  dans lequel cette méthode statique devienne performante, à savoir un voisinage d'un point de  $\partial\Omega$ . L'approche statique dans le sous-domaine  $\Omega_0$  consiste à rechercher parmi les champs s.a. dans le mode, tous ceux qui sont compatibles avec les capacités de résistance dans le sous-domaine  $\Omega_0$ , sans condition dans  $\Omega - \Omega_0$ . Cela revient en fait à effectuer une approche statique classique pour le massif  $\Omega$  renforcé (capacités de résistance infinies) dans la partie  $\Omega - \Omega_0$ . On notera cependant que cette approche statique pour le milieu renforcé doit être exhaustive, c'est-à-dire que le domaine  $H_0$  de  $S$  doit être connu exactement. En effet, si l'on ne connaît qu'une partie de  $K_0$ , l'inclusion  $K \subset K_0$  ne pourra être exploitée.

Il est facile d'illustrer ce procédé d'approche statique par l'extérieur sur l'exemple classique du cadre à 3 barres (voir figure

8). Le domaine  $\Omega$  est constitué par les 3 barres dont la limite en traction-compression vaut  $L$ . Le chargement est une force  $Q$  appliquée au milieu du segment  $BC$ . Une approche statique par l'extérieur du domaine  $K = [0, Q^+]$  des valeurs de  $Q$  potentiellement supportables est obtenue en effectuant l'approche statique exhaustive pour le sous-domaine  $\Omega_0$  de  $\Omega$  constitué par les barres (2) et (3).  $N_i$  désignant la tension de la barre n°i, le couple  $(N_2, N_3)$  définit un champ de contraintes dans  $H_0$  si :

$$\begin{aligned} N_2 + 2N_3 &= 3Q/2 \\ |N_2| &\leq L \\ |N_3| &\leq L \end{aligned} \quad (83)$$

La borne supérieure  $Q_0^+$  de  $K_0$  en résulte :

$$Q_0^+ = 2L \quad (84)$$

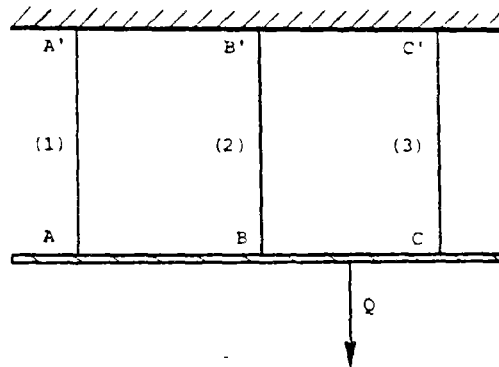


Figure 8. Le cadre à 3 barres

qui constitue un majorant de la charge extrême  $Q^+$ . Pour ce choix particulier de  $\Omega_0$ , il est facile de voir que les domaines  $K$  et  $K_0$  sont en fait identiques. Ceci est lié au fait que  $\Omega_0$  représente le sous-domaine de  $\Omega$  mis en mouvement dans un mécanisme d'écoulement plastique libre de la structure. Un autre choix de  $\Omega_0$  conduirait à une majoration au sens strict de  $Q^+$ . Ainsi, en choisissant  $\Omega_0 = (1) + (2)$ , on

trouverait  $Q_0^+ = 6L$ , ce qui constitue une majoration très médiocre de la charge extrême  $Q^+$ .

Cet exemple met en évidence l'importance du choix du sous-domaine  $\Omega_0$ . Pour le problème du fond sous-marin soumis à l'action de la houle, la condition (75) résulte de l'expression purement locale de la compatibilité entre équilibre et capacité de résistance au voisinage du fond marin. C'est pourquoi l'on pourrait craindre a priori que la qualité de cette approche de K puisse souffrir du fait que l'on ne s'est pas préoccupé de la dite compatibilité dans le reste du massif. En fait, la méthode statique par l'extérieur trouve ici sa justification physique dans le fait que les phénomènes d'instabilité auxquels il faut s'attendre seront précisément initiés au voisinage du fond marin.

#### *Un autre exemple d'application*

L'approche statique par l'extérieur a été développée pour le mode de chargement construit sur  $\text{vect}(p_h)$ . L'objet de ce paragraphe est de présenter une autre application de cette méthode, dans le cadre du mode de chargement du poinçon rigide. On considère donc une semelle rigide infinie selon la direction Oz (voir figure 9) et transmettant dans le sol de fondation occupant le domaine  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$  une force verticale F par unité de longueur et un moment nul par rapport à l'axe  $O_z$ . L'interface sol-semelle est lisse. Le critère de rupture de matériau est comme précédemment le critère de TRESCA linéaire isotrope. Un champ de contrainte  $\underline{\sigma}$  est s.a. dans ce mode de chargement si et seulement s'il vérifie les conditions :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \sigma_{xy}(x, 0) = 0$$

$$(\forall x \in \mathbb{R} - [-a, +a]) \quad \sigma_{yy}(x, 0) = 0 \tag{85}$$

$$\int_{-a}^{+a} \sigma_{yy}(x, 0) dx = -F ; \quad \int_{-a}^{+a} x \sigma_{yy}(x, 0) dx = 0$$

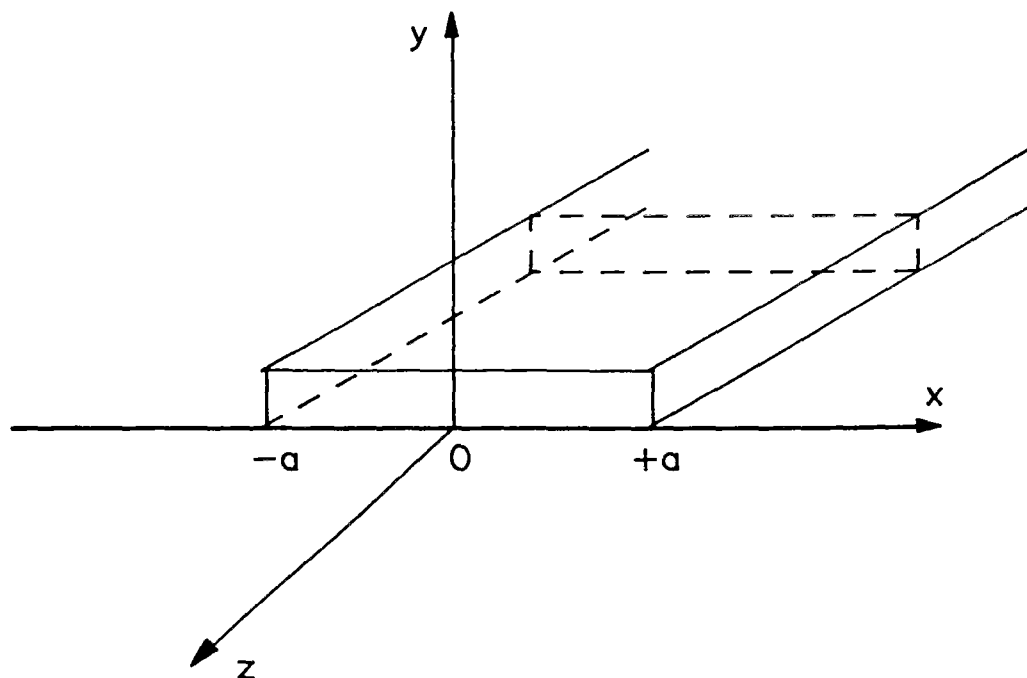


Figure 9. Semelle infinie soumise à une surcharge verticale

La détermination exacte du domaine des valeurs de  $F$  potentiellement supportables a été effectuée par Salençon (1974) au moyen d'une approche statique par l'intérieur et d'une approche par l'extérieur par les vitesses. On propose ici de retrouver le résultat de l'approche cinématique par un raisonnement statique par l'extérieur.

Soit donc  $\underline{\sigma}$  un champ de contrainte s.a. avec  $F$ ,  $C^1$  par morceaux et compatible avec les capacités de résistance du matériau. On pose  $p(x) = -\sigma_{yy}(x, 0)$ . Par construction,  $p(\cdot)$  est une fonction de pression potentiellement supportable par le massif. Le résultat du paragraphe 2.b.1.1 permet d'affirmer la continuité de  $p(\cdot)$ . En particulier, cela impose que  $p(-a^+) = p(a^-) = 0$ . On note  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  le  $n$ -uplet des points de discontinuité de  $p'_0(\cdot)$  dans l'intervalle  $] -a, +a[$ . On note de plus  $x_0 = -a$  et  $x_{n+1} = +a$ . Pour un réel  $x \in [-a, +a]$ , on pose encore  $j = \sup\{i, x_i < x\}$ . Avec ces notations, il vient :

$$p(x) = \sum_{i=0}^{j-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} p'(t) dt + \int_{x_j}^x p'(t) dt \quad (86)$$

ou encore :

$$p(x) = - \int_x^{x_{j+1}} p'(t) dt - \sum_{i=j+1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} p'(t) dt \quad (87)$$

La majoration (75) utilisée dans les relations (85) et (86) fournit alors deux majorations de  $|p(x)|$  :

$$|p(x)| \leq \gamma_c (a+x) \quad (88)$$

$$|p(x)| \leq \gamma_c (a-x)$$

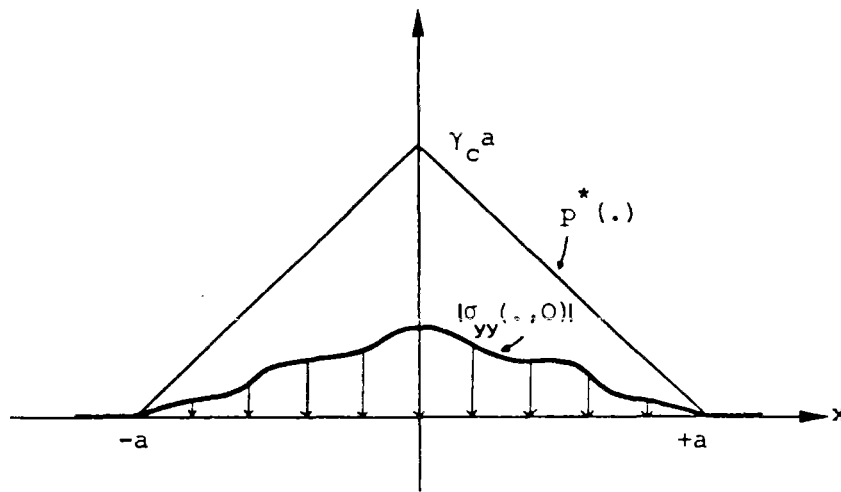


Figure 10. Position relative de  $p^*(.)$  et  $|\sigma_{yy}(\cdot, 0)|$

La figure 10 fournit une interprétation géométrique de (88). La fonction  $\sigma_{yy}(\cdot, 0)$  est tracée au-dessous de la fonction  $p^*(.)$  définie par :

$$\begin{aligned} x < -a & : p^*(x) = 0 \\ -a < x < 0 & : p^*(x) = \gamma_c (x+a) \\ 0 < x < a & : p^*(x) = \gamma_c (a-x) \\ x > a & : p^*(x) = 0 \end{aligned} \quad (89)$$

Cette majoration de  $|\sigma_{yy}(\cdot, 0)|$  impose une majoration de  $F$  qui est relié à  $\sigma_{yy}(\cdot, 0)$  par la relation donnée en (85)



$$|F| \leq \gamma_c \left\{ \int_{-a}^0 (x+a)dx + \int_0^a (a-x)dx \right\} = \gamma_c a^2 \quad (90)$$

Salençon (1974) a établi que  $F^* = \gamma_c a^2$ . De plus, il a montré que la distribution de contraintes sous le poinçon n'est autre que  $p^*(.)$  lorsque  $F = F^*$ .

### 2.b.2 Le fond marin incliné

Lorsque le fond marin est incliné, il est nécessaire de prendre en compte les forces de pesanteur et la pression hydrostatique s'exerçant respectivement dans le massif et sur sa frontière. En supposant que la pente est stable en dehors de l'action de la houle, il s'agit de quantifier le risque d'instabilité encouru sous un champ de pressions  $\lambda p_h(.)$  représentant les surpressions dues à la houle qui s'exercent sur le fond marin (voir figure 1). Il s'exprime sous la forme de conditions à vérifier par  $\lambda$  pour que  $\lambda p_h(.)$  soit potentiellement supportable.

#### 2.b.2.1 approche cinématique

L'emploi du mécanisme à deux blocs triangulaires de la figure 7 peut être généralisé sans difficulté dans le cas du fond incliné, l'abscisse  $a$  du point  $M$  prenant toute valeur immergée. Dans l'expression de la puissance des forces extérieures  $\mathcal{P}_{ext}$  donnée pour ce champ de vitesses à l'équation (33), il faut maintenant rajouter les contributions notées  $\mathcal{P}_{hyd}$  et  $\mathcal{P}_{pes}$  respectivement de la pression hydrostatique et de la pesanteur. Il est facile de voir que :

$$\mathcal{P}_{pes} = sU\gamma h^2 \sin\alpha \sin\chi \quad (84)$$

En notant  $d_0$  la profondeur d'eau à l'origine de l'axe des  $x$ , la valeur de la pression hydrostatique au point immergé d'abscisse  $x$  vaut :

$$p_{\text{hyd}}(x) = \gamma_w (d_0 - x \sin \chi) \quad (85)$$

d'où résulte l'expression de  $\mathcal{P}_{\text{hyd}}$ :

$$\mathcal{P}_{\text{hyd}} = s U \sin \alpha \left\{ \int_a^{a+h} p_{\text{hyd}}(x) dx - \int_{a-h}^a p_{\text{hyd}}(x) dx \right\} \quad (86)$$

soit, pour  $(a+h) \sin \chi < d_0$  :

$$\mathcal{P}_{\text{hyd}} = -s U \gamma_w h^2 \sin \alpha \sin \chi \quad (87)$$

En associant les équations (33), (84), et (87), il vient :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = s U h^2 \sin \alpha \left\{ \gamma' \sin \chi + \lambda \frac{f(h)}{h^2} \right\} \quad (88)$$

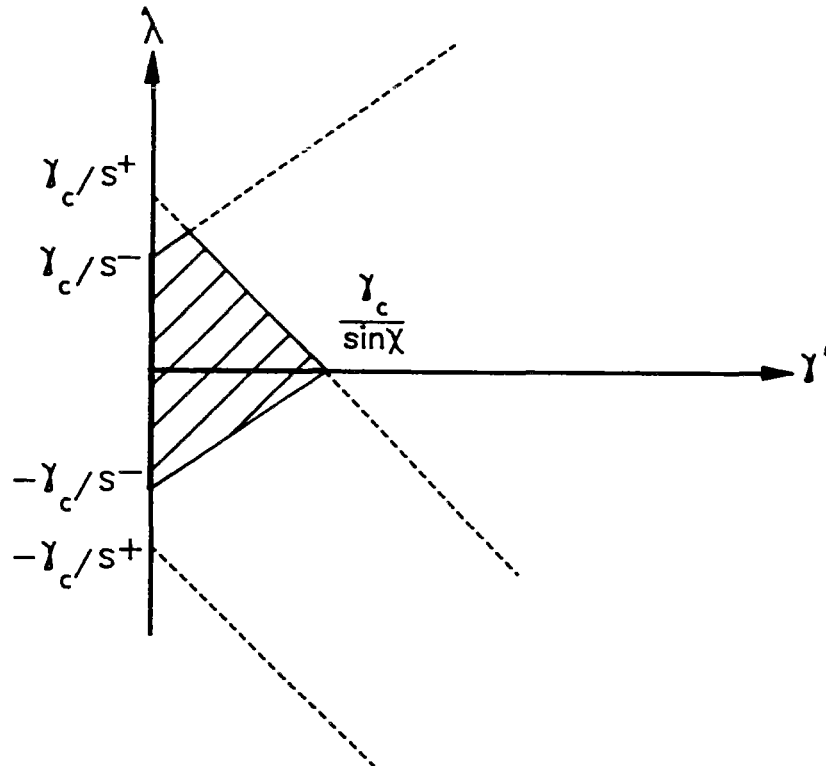


Figure 11. Approche par l'extérieur du domaine des valeurs de  $(\gamma', \lambda)$  potentiellement supportables

où l'on a posé  $\gamma' = \gamma - \gamma_w$ . Si  $s = +1$ , les forces de pesanteur sont motrices

et la pression hydrostatique est résistante. Ce résultat est inversé si  $s=-1$ . En utilisant (17), (34) et (88), le théorème cinématique fournit les conditions suivantes :

$$(\forall h < \frac{d}{\sin \chi})(\forall \alpha \in ]0, \pi/2[) \quad \left| \gamma' \sin \chi + \lambda \frac{f(h)}{h^2} \right| \leq \gamma_c \cdot \frac{1 + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \quad (89)$$

De nouveau, à  $h$  donné, la condition la plus restrictive est obtenue lorsque  $\alpha \rightarrow 0$ . En faisant de plus tendre  $h$  vers 0, il vient :

$$(\forall a \in I) \quad |\gamma' \sin \chi + \lambda p'_h(a)| \leq \gamma_c \quad (90)$$

Notant  $\mathcal{J}$  le segment  $] -\infty, d_0/\sin \chi ]$ , on introduit les ensembles  $\mathcal{J}_+$  et  $\mathcal{J}_-$  définis par :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_+ &= \{a \in \mathcal{J}, p'_h(a) \geq 0\} \\ \mathcal{J}_- &= \{a \in \mathcal{J}, p'_h(a) \leq 0\} \end{aligned} \quad (91)$$

et les réels  $S^+$  et  $S^-$  définis par :

$$\begin{aligned} S^+ &= \sup_{a \in \mathcal{J}_+} p'_h(a) \\ S^- &= \sup_{a \in \mathcal{J}_-} |p'_h(a)| \end{aligned} \quad (92)$$

Avec ces notations, les conditions (90) se résument sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} |\gamma' \sin \chi + \lambda S^+| &\leq \gamma_c \\ |\gamma' \sin \chi - \lambda S^-| &\leq \gamma_c \end{aligned} \quad (93)$$

Les équations (93) permettent de réaliser dans le plan  $(\gamma', \lambda)$  une approche par défaut du domaine des valeurs de  $\gamma'$  et  $\lambda$  certainement non supportables. C'est le complémentaire de la partie hachurée de la figure 11.

#### 2.b.2.2 Approche statique par l'intérieur

On a indiqué au Chapitre I qu'une diminution de la profondeur d'eau à

mesure que l'on se rapproche du rivage à partir du large provoque qualitativement une augmentation de la cambrure de la houle. Or, c'est précisément le paramètre cambrure qui contrôle l'apparition d'instabilité dans le massif sous-marin. Ainsi, les signes d'instabilité, s'il y en a, vont se manifester tout d'abord au voisinage de la zone du maximum de cambrure. En avant et en arrière de cette zone, respectivement pour de plus grandes profondeurs d'eau ou en direction du rivage, les effets de la houle seront peu sensibles. Ils seront a fortiori négligeables dans la partie émergée du talus. Le massif étant supposé stable en dehors de l'action de la houle, il paraît raisonnable de limiter l'étude de la stabilité au sous domaine  $\mathcal{J}xR^-$ , ce qui revient à supposer que les capacités de résistance du matériau sont infinies en dehors de cette partie du massif.

L'approche qui va suivre s'appuie donc sur la simplification qui consiste à ne pas se préoccuper de la compatibilité entre l'équilibre quasi statique et les capacités de résistance en dehors de  $\mathcal{J}xR^-$ , supposée vérifiée. Un champ de contraintes statiquement admissibles avec  $\lambda p_h(.)$  a déjà été utilisé au paragraphe 2.b.1.3. Il s'agit du champ  $\lambda \sigma_h^{e1}$ , donné par l'équation (44). Des champs de contraintes notés  $\underline{\underline{\sigma}}^{pes}$  et  $\underline{\underline{\sigma}}^{hyd}$  respectivement s.a. avec les forces de pesanteur et la pression hydrostatique sont donnés ci-dessous par leur représentation matricielle  $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}^{pes}$  et  $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}^{hyd}$  dans la base  $(\underline{i}, \underline{j})$ .

$$\hat{\underline{\underline{\sigma}}}^{pes}(x,y) = \gamma y \begin{bmatrix} \cos\chi & \sin\chi \\ \sin\chi & \cos\chi \end{bmatrix} \quad (94)$$

$$\hat{\underline{\underline{\sigma}}}^{hyd}(x,y) = \gamma_w d \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \gamma_w \begin{bmatrix} x \sin\chi & -y \sin\chi \\ -y \sin\chi & x \sin\chi \end{bmatrix} \quad (95)$$

Le champ de contraintes  $\lambda \sigma_h^{e1} + \underline{\underline{\sigma}}^{pes} + \underline{\underline{\sigma}}^{hyd}$  est s.a. avec la sollicitation constituée par la pression de la houle, la pression hydrostatique et les forces de pesanteur. Elle est compatible avec les capacités de résistance du matériau dans le domaine  $\mathcal{J}xR^-$  à condition que :

$$(\forall a \in I) \left\{ \left[ \lambda p'_h(a) + \gamma' \sin\chi \right]^2 + \left[ \frac{\lambda}{\pi} v p_x^1(p'_h(a+)) \right]^2 \right\}^{1/2} \leq \gamma_c \quad (96)$$

Ces conditions définissent une approche par défaut du domaine des valeurs de  $\lambda$  et  $\gamma'$  potentiellement supportables. Les équations (93) et (96) indiquent que l'effet de la pesanteur sur la stabilité d'un fond marin soumis à une surpression  $p(.)$  due à la houle peut être pris en compte simplement en remplaçant  $p'(.)$  par  $p'(.)+\gamma'\sin\chi$ .

### 2.b.2.3 application numérique

Le paragraphe 2 du Chapitre I a présenté une modélisation des surpressions dues à la houle sur un fond incliné. Les formules (93) et (96) permettraient d'encadrer le domaine des houles de projet potentiellement supportables en fonction de  $\gamma_c$ ,  $\gamma'$  et  $\chi$ .

Plus simplement, un ordre de grandeur des effets de l'inclinaison peut être obtenu en approchant la fonction de forme de la houle par  $p_h(x)=\sin k(d)x$  où  $k(d)$  est calculé par (I.24). La combinaison de (93) et (96) fournit alors la valeur exacte de la charge extrême, soit  $p_o^+ = (\gamma_c - \gamma'\sin\chi)/k(d)$ . Par rapport au cas d'un massif à surface horizontale, l'effet de l'inclinaison est donc équivalent à une réduction du gradient de cohésion s'élevant à  $\gamma'\sin\chi$ .

A titre d'exemple, il est intéressant de considérer le cas particulier où le gradient de cohésion a la valeur minimale conférant la stabilité inconditionnelle, c'est-à-dire  $0.225 \gamma_w$ . On suppose de plus que  $\gamma' \approx \gamma_w$  et  $\chi=3^\circ$ . Pour ces valeurs numériques, l'erreur relative commise (par excès) sur  $p_o^+$  en négligeant l'inclinaison du talus est de l'ordre de 25%. Ainsi, même pour les faibles valeurs de  $\chi$ , la prise en compte des effets déstabilisants de la gravité s'avère nécessaire.

## 2.c la houle de Stokes d'ordre 2

Lorsque la houle de projet ne respecte pas les conditions de faible amplitude et de faible cambrure, on fait appel classiquement à une théorie de Stokes d'ordre  $>1$ . L'objet de ce paragraphe est d'étudier l'incidence du choix d'un modèle de houle sur le domaine des houles de projet potentiellement supportables. Plus précisément, on se propose de comparer  $K_1$  et  $K_2$ . On se restreint à un massif à surface horizontale.

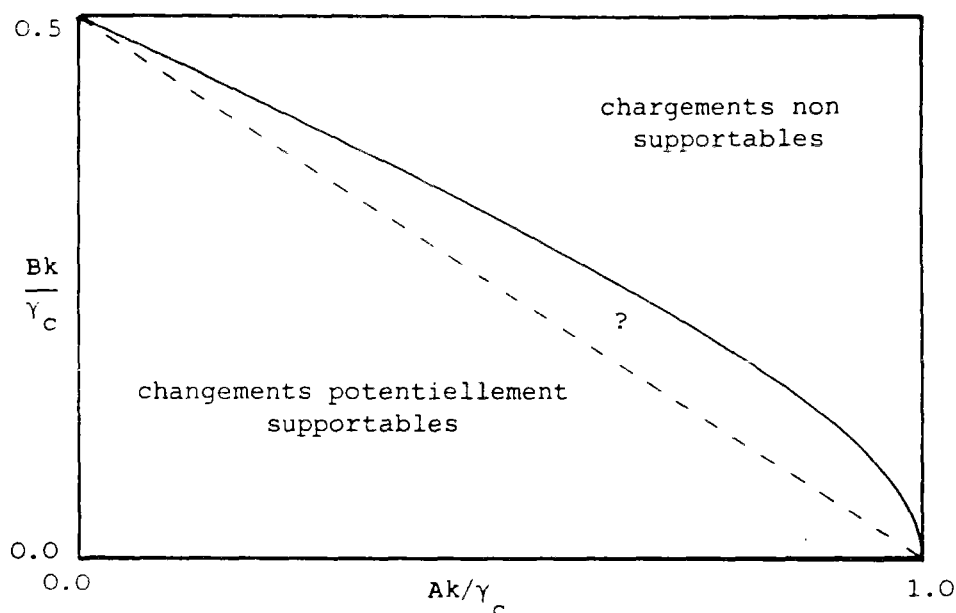


figure 12. Première approche par l'intérieur (2.c.3.1) et approche par l'extérieur de  $K'_2$  dans le plan  $(Ak/\gamma_c, Bk/\gamma_c)$ .

La théorie de STOKES d'ordre 2 propose de modéliser la pression due à la houle sur le fond marin par une onde progressive de la forme suivante :

$$p(x, t) = p_0 \cos(kx - \omega t) + p_1 \cos(2(kx - \omega t)) \quad (104)$$

L'application  $\mathcal{P}_2$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  qui au triplet  $(H, L, d)$  associe  $p_0$  et  $p_1$  a été introduite au Chapitre I. On rappelle que :

$$p_0 = \frac{\gamma_w H}{2\text{Ch}(2\pi \frac{d}{L})} \quad (105)$$

$$p_1 = \frac{3}{8}\pi \gamma_w \frac{H^2}{L} \frac{\text{th}(2\pi \frac{d}{L})}{\text{sh}(2\pi \frac{d}{L})^2} \left[ \frac{1}{\text{sh}(2\pi \frac{d}{L})^2} - \frac{1}{3} \right]$$

A l'image de ce qui a été fait pour le cas de la houle de STOKES d'ordre 1, on introduit le mode de chargement à 2 paramètres (notés A et B) construit sur vect(coskx, cos2kx). Il s'agit de déterminer successivement  $K'_2$  et  $K_2 = \mathcal{H}\mathcal{P}_2^{-1}(K'_2)$ . La résolution de ce problème qui est présentée dans la suite s'appuie sur les résultats généraux du paragraphe 2.b

### 2.c.1 Une remarque préliminaire sur les symétries de $K'_2$

Soit  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ . Ce couple définit un chargement du massif caractérisé par le champ de pressions  $p^{A,B}(x) = A \cos kx + B \cos 2kx$ . En premier lieu, il est immédiat de vérifier que  $K'_2$  est symétrique par rapport à l'origine. En effet, si  $p^{A,B}(\cdot)$  est potentiellement supportable, il en est de même de  $p^{-A,-B}(\cdot)$ . On note maintenant  $f_a(\cdot)$  la fonction définie à partir d'une fonction numérique  $f(\cdot)$  par  $f_a(\cdot) = f(\cdot - a)$ . Les capacités de résistance dans le massif étant invariantes par translation le long de l'axe des x, si  $p^{A,B}$  est potentiellement supportable,  $p^{A,B}_a$  l'est également pour toutes valeurs du réel a. En choisissant  $a = \frac{\pi}{k}$ , on en déduit que si  $(A, B) \in K'_2$ , alors il en est de même de  $(-A, B)$ .  $K'_2$  est donc symétrique par rapport à l'axe  $A=0$ . Puisqu'il est également symétrique par rapport à l'origine, il l'est donc encore par rapport à l'axe  $B=0$ .

### 2.c.2 Approche cinématique de $K'_2$

On considère de nouveau la stabilité du massif sous le champ de pressions  $p(x) = A \cos kx + B \cos 2kx$ . L'équation (42) fournit une famille de conditions nécessaires à vérifier par A et B pour que  $(A, B) \in K'_2$ :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |A.\sin(kx) + 2B.\sin(2kx)| \leq \frac{\gamma_c}{k} \quad (106)$$

ou, de manière équivalente :

$$\sup_{\phi \in [0, 2\pi]} |A.\sin \phi + 2B.\sin 2\phi| \leq \frac{\gamma_c}{k} \quad (107)$$

Il est facile de voir que le lieu des points (A,B) vérifiant (107) a les mêmes symétries que  $K'_2$ . Chaque valeur de  $\phi$  définit deux demi-plans dans l'espace des paramètres de chargement, de valeurs (A,B) certainement non supportables ; ils sont délimités par les droites :

$$A.\sin \phi + 2B.\sin 2\phi = \pm \frac{\gamma_c}{k} \quad (108)$$

La relation (107) caractérise le domaine contenu à l'intérieur de l'enveloppe convexe  $\mathcal{E}$  des droites d'équations (108) dans le plan (A,B), lorsque  $\phi$  décrit l'intervalle  $[0, 2\pi]$ . En introduisant la fonction  $\lambda_c(.)$  définie par :

$$\lambda_c(\beta) = \frac{\gamma_c / k}{\sup_{\phi \in [0, 2\pi]} |\sin \phi + 2 \operatorname{tg} \beta . \sin 2\phi|} \quad (109)$$

il est facile de voir que  $r = \lambda_c(\beta) / \cos \beta$ , n'est autre que l'équation en coordonnées polaires de  $\mathcal{E}$  dans le quart de plan ( $A > 0, B > 0$ ). Le calcul de  $\lambda_c(.)$  est fourni à l'Annexe 3 et la représentation graphique de  $\mathcal{E}$  est donnée par la courbe en trait continu de la figure 12.

### 2.c.3 Approche statique par l'intérieur de $K'_2$

#### 2.c.3.1 Utilisation du champ de contraintes élastiques

L'utilisation de l'équation (60) pour le champ de pressions  $p(x) = A \cos kx + B \cos 2kx$  va fournir une condition suffisante de stabilité potentielle du massif sous l'action de  $p(.)$ . En appliquant (58), il



est facile de voir que :

$$\text{vp } \frac{1}{x} (p'(x+)) = \pi (A \cos(kx) + 2B \cos(2kx)) \quad (110)$$

(60) permet alors d'affirmer que le chargement  $(A,B)$  est potentiellement supportable si :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \left[ (A \sin(kx) + 2B \sin(2kx))^2 + (A \cos(kx) + 2B \cos(2kx))^2 \right]^{1/2} \leq \frac{\gamma_c}{k} \quad (111)$$

soit encore :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \left[ A^2 + 4B^2 + 4AB \cos(kx) \right]^{1/2} \leq \frac{\gamma_c}{k} \quad (112)$$

ce qui définit dans le plan  $(A,B)$  l'intérieur d'un losange représenté à la figure 13 et d'équations:

$$|A \pm 2B| \leq \frac{\gamma_c}{k} \quad (113)$$

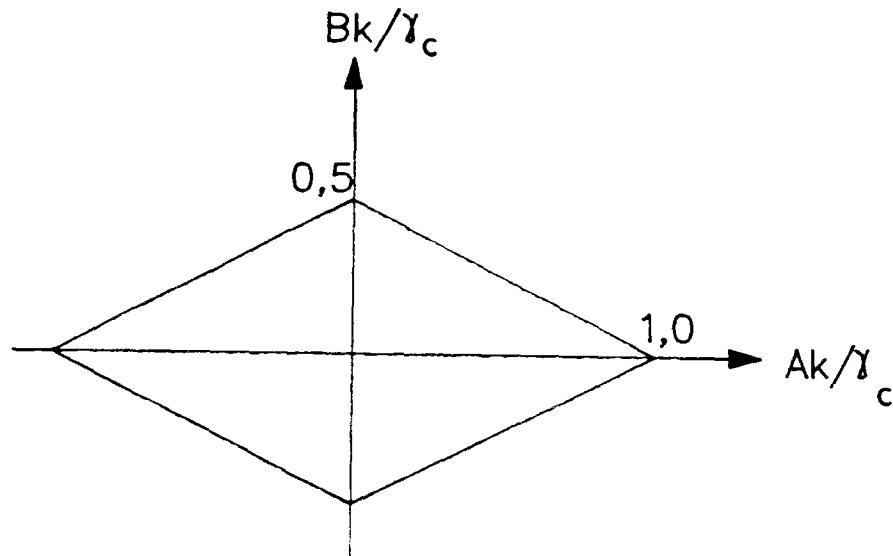


Figure 13. Approche par l'intérieur dans le plan  $(\frac{Ak}{\gamma_c}, \frac{Bk}{\gamma_c})$

En appliquant le résultat (13) obtenu pour la houle de Stokes d'ordre 1, successivement aux valeurs  $k$  et  $2k$  du nombre d'ondes, on pouvait prévoir que les points  $P_0^\pm(\pm\gamma_c/k, 0)$  et  $P_1^\pm(0, \pm\gamma_c/2k)$  du plan  $(A,B)$

étaient éléments de  $K'_2$ . En raison de la convexité de  $K'_2$ , il était donc évident que le losange de la figure 13 était inclus dans  $K'_2$ . L'origine de l'identité des résultats établis par le raisonnement statique par l'intérieur précédent d'une part, et l'argument de convexité d'autre part est claire. En effet, soient  $\underline{\sigma}_0^\pm$  et  $\underline{\sigma}_1^\pm$  les champs de contraintes élastiques équilibrant respectivement les chargements  $P_0^\pm$  et  $P_1^\pm$ . Etant donné un chargement  $Q = \lambda P_0^\pm + (1-\lambda)P_1^\pm$  avec  $\lambda \in [0,1]$ , le raisonnement qui permet d'établir (60) pour le champ de pression  $p(\cdot)$  correspondant à  $Q$  repose sur le champ de contraintes  $\underline{\sigma} = \lambda \underline{\sigma}_0^\pm + (1-\lambda) \underline{\sigma}_1^\pm$ . Et c'est précisément à ce champ  $\underline{\sigma}$  que l'argument de convexité fait appel pour prouver que  $Q \in K'_2$ .

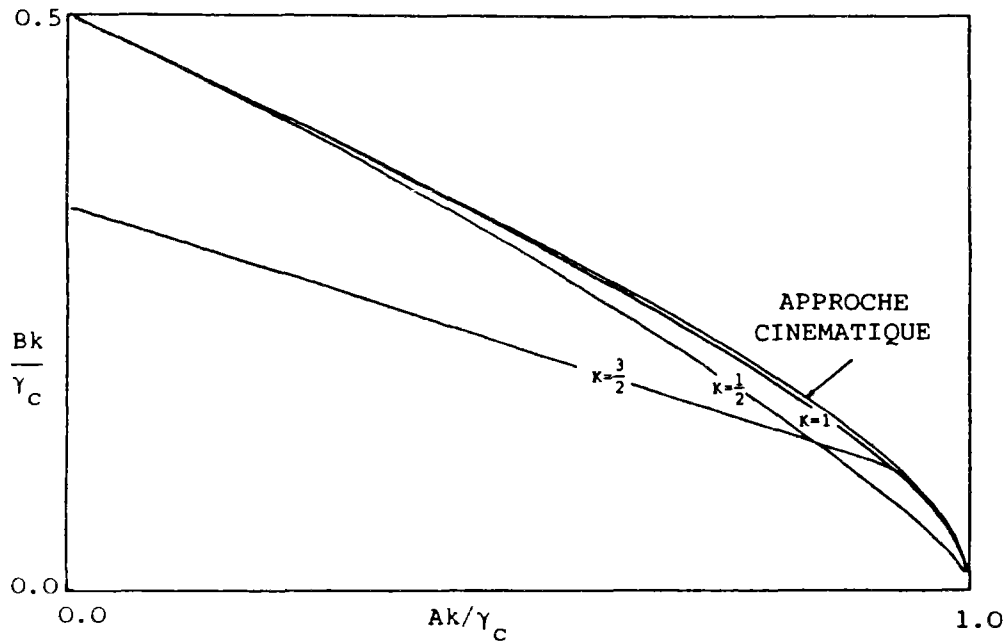


Figure 14. Approches statiques et cinématique de  $K'_2$  pour différentes valeurs de  $K$

#### 2.c.3.2 Utilisation du champ de contraintes discontinu

Pour affiner l'encadrement de la frontière de  $K'_2$ , il faut déterminer laquelle des deux bornes (sinon les deux !) doit être améliorée. Ceci

nécessite de faire une hypothèse heuristique sur le mode de rupture du massif. En raison de la propriété  $C(0)=0$ , il est assez naturel d'adopter l'hypothèse d'instabilité de surface, ce qui revient à "faire confiance" à l'approche cinématique. On est donc amené à proposer une nouvelle approche par l'intérieur. Elle repose sur le champ de contraintes introduit au paragraphe 2.b.1.4.

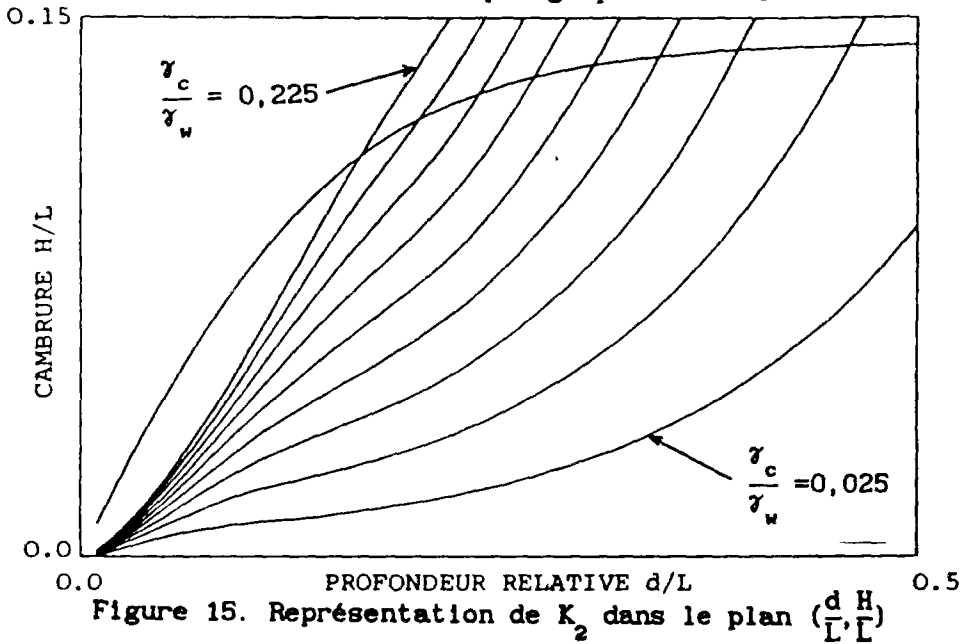


Figure 15. Représentation de  $K_2$  dans le plan  $(\frac{d}{L}, \frac{H}{L})$

La mise en oeuvre pratique procède par trajets de charges radiaux dans le quart de plan ( $A>0, B>0$ ). Plus précisément, étant donné un réel  $\beta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , on définit une fonction de forme  $p_h(x) = \cos kx + \operatorname{tg} \beta \cos 2kx$ . Il s'agit de déterminer la valeur maximale  $\lambda^+$  de  $\lambda$  pour laquelle  $\lambda p_h(.)$  est potentiellement supportable. Tout réel  $\lambda$  satisfaisant les inégalités (62) fournit une valeur par défaut de  $\lambda^+$ . Pour le choix particulier de  $p_h(.)$  envisagé ici, et en posant  $K=k\alpha, Z=ky, \varphi=kx$ , ces conditions prennent la forme suivante :

$$\lambda \leq \frac{\gamma_c/k}{\sup_{\varphi \in [0, 2\pi]} \sqrt{\{\sin\varphi + 2\operatorname{tg}\beta \sin 2\varphi\}^2 + K^2 16 \cdot \{\cos\varphi + 4\operatorname{tg}\beta \cos 2\varphi\}^2}} \quad (114)$$

$$\lambda \leq \frac{\gamma_c/k \cdot |Z|/K}{\sup_{\varphi \in [0, 2\pi]} \sqrt{\{\sin\varphi + 2\operatorname{tg}\beta \sin 2\varphi\}^2 + 1/4K^2 \{\cos\varphi(1 + K(\frac{K}{2} + Z)) + \operatorname{tg}\beta \cos 2\varphi(1 + 4K(\frac{K}{2} + Z))\}^2}}$$

la deuxième inégalité devant être satisfaite pour toute valeur de  $Z < -K$ . L'angle  $\beta$  étant fixé, la question est de déterminer la plus grande valeur  $\lambda_g(\beta)$  de  $\lambda$  satisfaisant (114) en optimisant en particulier le choix du réel  $\alpha$ . Le principe du calcul de  $\lambda_g(\cdot)$  est exposé à l'Annexe 3. Dans le quart de plan ( $A > 0, B > 0$ ), Le domaine situé à l'intérieur de la courbe définie en coordonnées polaires par l'équation  $r = \lambda_g(\beta)/\cos\beta$  constitue une approche par l'intérieur de  $K'_2$ . La figure 14 présente 3 approches de  $K'_2$  obtenues pour les valeurs  $K = 0.5; 1.0; 1.5$ . Pour  $K = 1$ , soit  $\alpha = 1/k$ , le calcul numérique prouve que l'écart entre  $\lambda_g(\beta)$  et  $\lambda_c(\beta)$  (défini à l'équation 109) n'excède par 1% en valeur relative. A cette approximation près, la courbe  $r = \lambda_c(\beta)/\cos\beta$  représentée à la figure 12 n'est autre que la frontière du domaine  $K'_2$ . La connaissance de celui-ci permet de déterminer maintenant les houles potentiellement supportables dans le cadre du modèle de Stokes d'ordre 2.

### 2.c.3.3 Détermination du domaine $K_2$

La figure 15 représente  $K_2$  dans le plan  $(\frac{d}{L}; \frac{H}{L})$  selon le principe déjà utilisé pour  $K_1$ . On retrouve sous la courbe concave le domaine  $\mathcal{H}$  des points  $(H, L, d)$  possibles. Chacune des autres courbes matérialise la frontière du domaine des chargements  $(H, L, d)$  potentiellement supportables pour 9 valeurs du rapport  $\gamma_c/\gamma_w$  de 0,025 à 0,225. Le

domaine situé entre la courbe concave et l'une des courbes précédentes rassemble, parmi les chargements possibles, ceux qui provoquent une instabilité dans le massif.

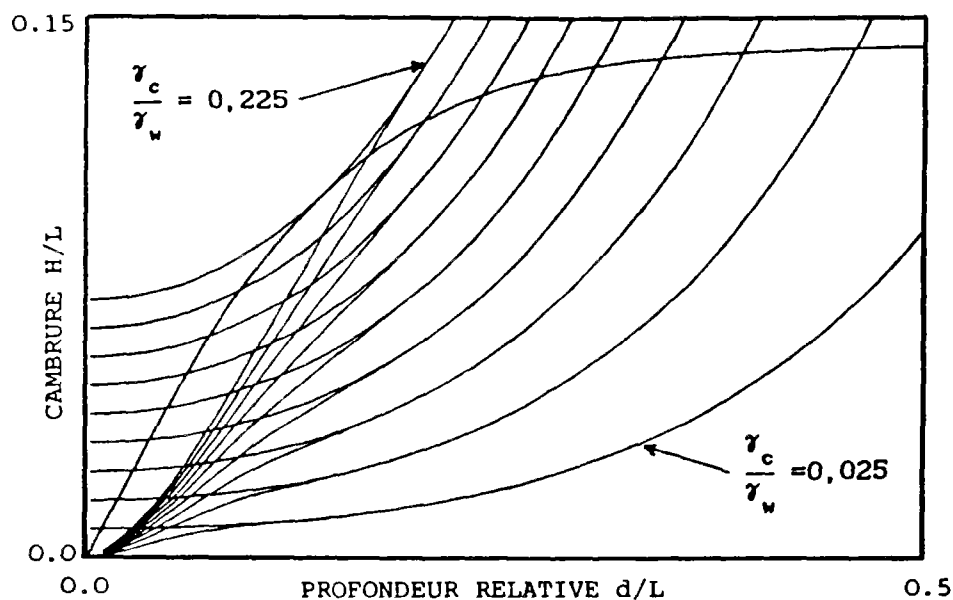


Figure 16. Superposition de  $K_1$  et  $K_2$  dans le plan  $(\frac{d}{L}, \frac{H}{L})$

La figure 16 superpose les figures 5 et 15. On observe qu'au delà d'une valeur de  $\frac{d}{L}$  qui dépend du rapport  $\gamma_c/\gamma_w$ , la frontière des domaines  $K_1$  et  $K_2$  coïncident. Ceci est cohérent avec le fait que le premier ordre de la théorie de Stokes est suffisant pour les grandes valeurs de la profondeur relative. Cependant, comme on pouvait s'y attendre, c'est dans le domaine des faibles profondeurs relatives, là où le terme en  $\cos 2kx$  dans l'expression de la pression prédomine que  $K_1$  et  $K_2$  vont différer. Il est intéressant d'examiner l'ordonnée à l'origine de la frontière de  $K_1$  et  $K_2$ . Pour  $K_2$ , il est facile de voir qu'elle est nulle quelle que soit la valeur de  $\gamma_c/\gamma_w$  alors que c'est une fonction croissante de ce rapport pour  $K_1$ . A partir de la figure 5, un critère de stabilité inconditionnelle portant sur  $\gamma_c$ , à savoir  $\gamma_c \geq 0,225\gamma_w$ , avait été énoncé. En revanche, pour cette valeur du gradient de cohésion, la figure 15 montre qu'il existe des chargements possibles non potentiellement supportables. L'analyse à l'ordre 2 remet donc en question la validité du critère énoncé. Cette observation met en évidence que les résultats de l'étude de stabilité

pour un jeu donné de caractéristiques physiques de la houle ( $H$ ,  $L$ , et  $d$  dans le cas présent) sont largement conditionnés par le choix du modèle de houle. Pour des valeurs réalistes de  $\gamma_c/\gamma_w$ , le calcul montre que le domaine  $\mathcal{K}$  n'est jamais inclus strictement dans  $K_2$ .

### 3 - LE CRITÈRE LINÉAIRE ANISOTROPE

L'étude des effets de l'anisotropie sera limitée au cas du fond marin horizontal soumis à la houle de Stokes d'ordre 1. Le critère linéaire anisotrope a été introduit au paragraphe 1.d.

#### 3.a Approche par l'extérieur de $K'_1$

##### 3.a.1 Approche statique

Le raisonnement présenté dans la suite ne nécessite pas de particulariser la forme de la fonction  $p_h$ . Il sera appliqué ultérieurement au cas  $p_h(x) = \sin kx$ . Il s'inscrit dans le prolongement du paragraphe 2.b.1.5 dont il utilise les notations.

Soit donc de nouveau un point  $M$  d'abscisse  $x$  de  $\partial\Omega$  et un champ de contraintes  $\underline{g} \in L^{-1}(\lambda) \cap H_0$ . Les développements limités des composantes de  $\underline{g}$  au premier ordre par rapport à  $y$  en  $(\alpha, 0) \in \partial\Omega_\varepsilon - D$  ont été donnés en (69) et (71)

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}(\alpha, y) &= \lambda y p'_h(\alpha) + y \beta_{xy}(\alpha, y) \\ \sigma_{yy}(\alpha, y) &= -\lambda p_h(\alpha) + y \beta_{yy}(\alpha, y) \\ \sigma_{xx}(\alpha, y) &= -\lambda p_h(\alpha) + y \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y}(\alpha, 0) + y \beta_{xx}(\alpha, y)\end{aligned}\tag{115}$$

où les fonctions  $\beta_{ij}$  vérifient :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \beta_{xx}(\alpha, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \beta_{xy}(\alpha, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \beta_{yy}(\alpha, y) = 0\tag{116}$$

Par définition de  $H_0$ , il existe un réel  $\varepsilon$  et un demi-disque  $\Omega_\varepsilon$  dans lequel  $\underline{g}$  est compatible avec les capacités de résistance du matériau anisotrope :

$$\sqrt{\left[\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y}(\alpha, 0) + \beta_{xx}(\alpha, y) - \beta_{yy}(\alpha, y)\right]^2 + 4\left[\lambda p'_h(\alpha) + \beta_{xy}(\alpha, y)\right]^2} \leq 2\gamma_c(\delta) \quad (117)$$

où  $\delta$  désigne l'angle de la direction principale mineure de  $\underline{\sigma}(\alpha, y)$  avec la verticale. On peut montrer que (voir Annexe 4):

$$\lim_{y \rightarrow 0} \operatorname{tg} \delta = -(t + s\sqrt{1+t^2}) \quad \text{où} \quad \begin{cases} s=+1 & \text{si } p'_h(\alpha) > 0 \\ s=-1 & \text{si } p'_h(\alpha) < 0 \end{cases} \quad (118)$$

où l'on a posé  $t = \frac{1}{2\lambda p'_h(\alpha)} \cdot \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y}(\alpha, 0)$ . Il est utile d'observer que  $\delta$  n'intervient dans  $\gamma_c(\delta)$  que par la valeur de  $|\operatorname{tg} \delta|$ . En faisant tendre  $y$  vers 0 dans (117) et en notant  $\delta_t^S = \arctg(t + s\sqrt{1+t^2})$ , il est alors facile de vérifier que :

$$(\forall \alpha \in I'_\varepsilon) \quad |\lambda| \cdot |p'_h(\alpha)| \leq \frac{\gamma_c(\delta_t^S)}{\sqrt{1+t^2}} \quad (119)$$

Et il en résulte (voir Annexe 5) qu'il existe un réel  $T$  pour lequel :

$$|\lambda| \cdot F_h(x) \leq \frac{\gamma_c(\delta_T^+)}{\sqrt{1+T^2}} \quad (120)$$

En reproduisant le raisonnement pour tout choix de l'abscisse  $x$  du point  $M$ , il vient :

$$\lambda^+ \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}} F_h(x) \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\gamma_c(\delta_t^+)}{\sqrt{1+t^2}} \quad (121)$$

Ce résultat qui a pu être établi indépendamment de la forme de  $p_h$  généralise la majoration (41). En l'appliquant au cas particulier  $p_h(x) = \sin kx$ , on trouve :



$$p_o^+ \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\gamma_c(\delta_t^+)/k}{\sqrt{1+t^2}} \quad (122)$$

qui redonne immédiatement (22) dans le cas isotrope où  $\gamma_c$  est une constante. A titre indicatif, on propose maintenant une démonstration de (122) (pour la houle de Stokes d'ordre 1) qui repose sur une approche cinématique.

### 3.a.2 Approche cinématique

On se propose de développer l'utilisation du mécanisme à deux blocs de la figure 3 dans le cas du matériau anisotrope. Ce mécanisme met en jeu exclusivement des discontinuités de vitesses localisées le long des segments O'A, O'O et O'B. Le calcul de la puissance dissipable  $P(\underline{V})$  nécessite donc l'expression de la fonction  $\pi(\underline{n}, \underline{V})$  dans le cas anisotrope. Elle a été fournie par Salençon et Tristan-Lopez (1981). Le calcul de cette quantité est reproduit à l'Annexe 1, où les notations utilisées dans ce paragraphe sont introduites.

$$\pi(\underline{n}, \underline{V}) = \sup_{\theta} \left\{ C(\theta) \cdot \sin 2(\theta - \varepsilon) \cdot V_t \right\} \quad (123)$$

où  $\varepsilon = (\underline{j}, \underline{n})$ . En fonction du signe de  $V_t$ , ces auteurs introduisent deux formulations distinctes de la fonction  $\pi$  :

$$\text{--si } V_t > 0: \pi(\underline{n}, \underline{V}) = C(0) |V_t| \pi_+(\varepsilon) \text{ avec } \pi_+(\varepsilon) = \sup_{\theta} \left\{ \frac{C(\theta)}{C(0)} \cdot \sin 2(\theta - \varepsilon) \right\} \quad (124)$$

$$\text{--si } V_t < 0: \pi(\underline{n}, \underline{V}) = C(0) |V_t| \pi_-(\varepsilon) \text{ avec } \pi_-(\varepsilon) = \sup_{\theta} \left\{ \frac{C(\theta)}{C(0)} \cdot \sin 2(\varepsilon - \theta) \right\}$$

On observera que les fonctions  $\pi_+$  et  $\pi_-$  dépendent exclusivement des deux paramètres d'anisotropie  $K_1$  et  $K_2$  et de  $\varepsilon$ . Outre l'anisotropie, les relations précédentes prennent en compte l'hétérogénéité du

matériau par l'intermédiaire de  $C(0,y)=\gamma_c(0)|y|$  qui dépend de la profondeur. Les signes des composantes tangentielles  $V_t$  des discontinuités de vitesses respectivement le long de  $O'A$ ,  $O'O$  et  $O'B$  sont rappelés à la figure 17. Il en résulte l'expression suivante de la puissance dissipable dans ce mécanisme :

$$P(\underline{V})=\gamma_c(0)U \left\{ \pi_-(\alpha) \int_{O'}^A |y| dl + \pi_-(-\alpha) \int_{O'}^B |y| dl + 2\pi_+(\pi/2) \sin \alpha \int_{O'}^O |y| dl \right\} \quad (125)$$

soit en observant que  $\pi_+(\epsilon)=\pi_-(-\epsilon)$ :

$$P(\underline{V})=\gamma_c(0)Uh^2 \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \left\{ \frac{\pi_+(\alpha)+\pi_+(-\alpha)}{2} + \pi_+(\pi/2) \sin^2 \alpha \right\} \quad (126)$$

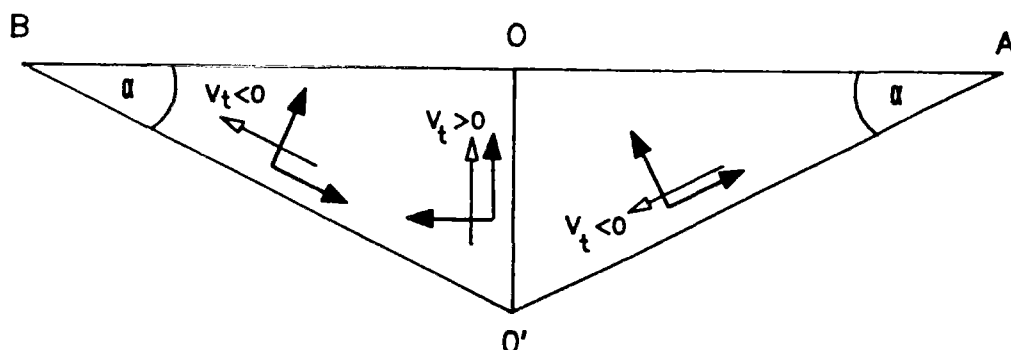


Figure 17. Mécanisme étudié avec signes des discontinuités

Par ailleurs, la puissance extérieure des forces de pression dans ce mécanisme a déjà été calculée. Pour  $p_h(x)=p_o \sin kx$ , elle est fournie à l'équation (20). Le théorème cinématique permet alors d'affirmer que :

$$p_o^+ \leq \frac{\gamma_c(0)}{k} \cdot \frac{(kh)^2}{2(1-\cos kh)} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \left\{ \frac{\pi_+(\alpha)+\pi_+(-\alpha)}{2} + \pi_+(\pi/2) \sin^2 \alpha \right\} \quad (127)$$

pour toutes valeurs de  $\alpha \in ]0, \pi/2[$  et de  $h > 0$ . A  $\alpha$  fixé, la condition la plus restrictive est obtenue lorsque  $h \rightarrow 0$ :

$$(\forall \alpha \in ]0, \pi/2[) \quad p_0^+ \leq \frac{\gamma_c(0)}{k} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \left\{ \frac{\pi_+(\alpha) + \pi_+(-\alpha)}{2} + \pi_+(\pi/2) \sin^2 \alpha \right\} \quad (128)$$

Il s'agit maintenant, pour des valeurs données de  $K_1$  et  $K_2$  de déterminer la valeur  $\alpha_0$  de  $\alpha$  pour laquelle le membre de droite est minimal. La définition de  $\pi_+$  ne se prête pas à une détermination analytique de  $\alpha_0$ . Cependant, on constate numériquement que ce minimum est atteint lorsque  $\alpha = 0$ , et ceci pour toute valeur de  $(K_1, K_2) \in [0, 5; 1, 5]^2$ . La meilleure majoration de  $p_0^+$  provient donc encore une fois d'un mécanisme évanescent. Il vient :

$$p_0^+ \leq \frac{\gamma_c(0)}{k} \cdot \pi_+(0) = \frac{1}{k} \cdot \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left[ \gamma_c(\theta) \sin 2\theta \right] \quad (129)$$

Remarquant d'abord que la fonction  $\gamma_c(\theta) \sin 2\theta$  est périodique de période  $\pi$ , on peut se contenter d'examiner les valeurs de  $\theta$  situées entre 0 et  $\pi$  pour déterminer  $\pi_+(0)$ . De plus, pour  $\theta > \frac{\pi}{2}$ , on voit que  $\sin 2\theta < 0$ . La valeur maximale de  $\gamma_c(\theta) \sin 2\theta$  est donc atteinte pour une valeur  $\hat{\theta}$  de  $\theta$  comprise entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ .

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left[ \gamma_c(\theta) \sin 2\theta \right] = \sup_{\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[} \left[ \gamma_c(\theta) \sin 2\theta \right] \quad (130)$$

En associant à  $\theta$  le réel  $t$  tel que  $\theta = \arctg(t + \sqrt{1+t^2})$  on définit une bijection  $\varphi$  de  $]0, \frac{\pi}{2}[$  dans  $\mathbb{R}$ . Ainsi

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left[ \gamma_c(\theta) \sin 2\theta \right] = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left[ \gamma_c(\varphi^{-1}(t)) \sin(2\varphi^{-1}(t)) \right] \quad (131)$$

En remarquant de plus que  $\varphi^{-1}(t) = \delta_t^+$  et que  $\sin 2\delta_t^+ = 1/\sqrt{1+t^2}$ , il vient encore, en associant (130) et (131) :

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left[ \gamma_c(\theta) \sin 2\theta \right] = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\gamma_c(\delta_t^+)}{\sqrt{1+t^2}} \quad (132)$$

qui jointe à l'inégalité (129) redonne la majoration de  $p_0^+$  explicitée en (122) et achève de démontrer l'équivalence des deux approches.

### 3.b approche statique par l'intérieur.

#### 3.b.1 Emploi du champ de contraintes élastiques.

Un premier minorant de l'amplitude limite  $p_0^+$  peut être obtenu en utilisant le champ de contraintes élastiques s.a. avec  $p_0 \sin kx$ . La compatibilité en tout point  $M(x,y)$  de  $\Omega$  de ce champ de contraintes avec les capacités de résistance du matériau s'exprime par :

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^-) \quad kp_0 \exp(ky) \leq \gamma_c(\delta(x,y)) \quad (133)$$

où  $\delta(x,y)$  désigne l'angle de la direction principale mineure de  $\underline{\sigma}(x,y)$  avec la verticale. Les inégalités (133) peuvent être condensées en la condition unique :

$$kp_0 \leq \inf_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^-} \gamma_c(\delta(x,y)) \quad (134)$$

La détermination de la quantité  $\delta(x,y)$  s'appuie sur les formules (II.64). On montre que  $\tan \delta$  ne dépend que de  $x$  et vaut  $kx/2 - \pi/4$ . Ainsi, lorsque  $x$  décrit  $\mathbb{R}$ , il en est de même de  $\tan \delta$ . Il en résulte une minoration de  $p_0^+$ :

$$kp_0^+ \geq \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \gamma_c(\theta) \quad (135)$$

Pour des raisons qui apparaîtront clairement au paragraphe suivant, on introduit le paramètre  $L = kp_0 / \gamma_c(\pi/4)$ . Une minoration de  $L^+$  résulte immédiatement de (135):

$$L^+ \geq \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \frac{\gamma_c(\theta)}{\gamma_c(\frac{\pi}{4})} \quad (136)$$

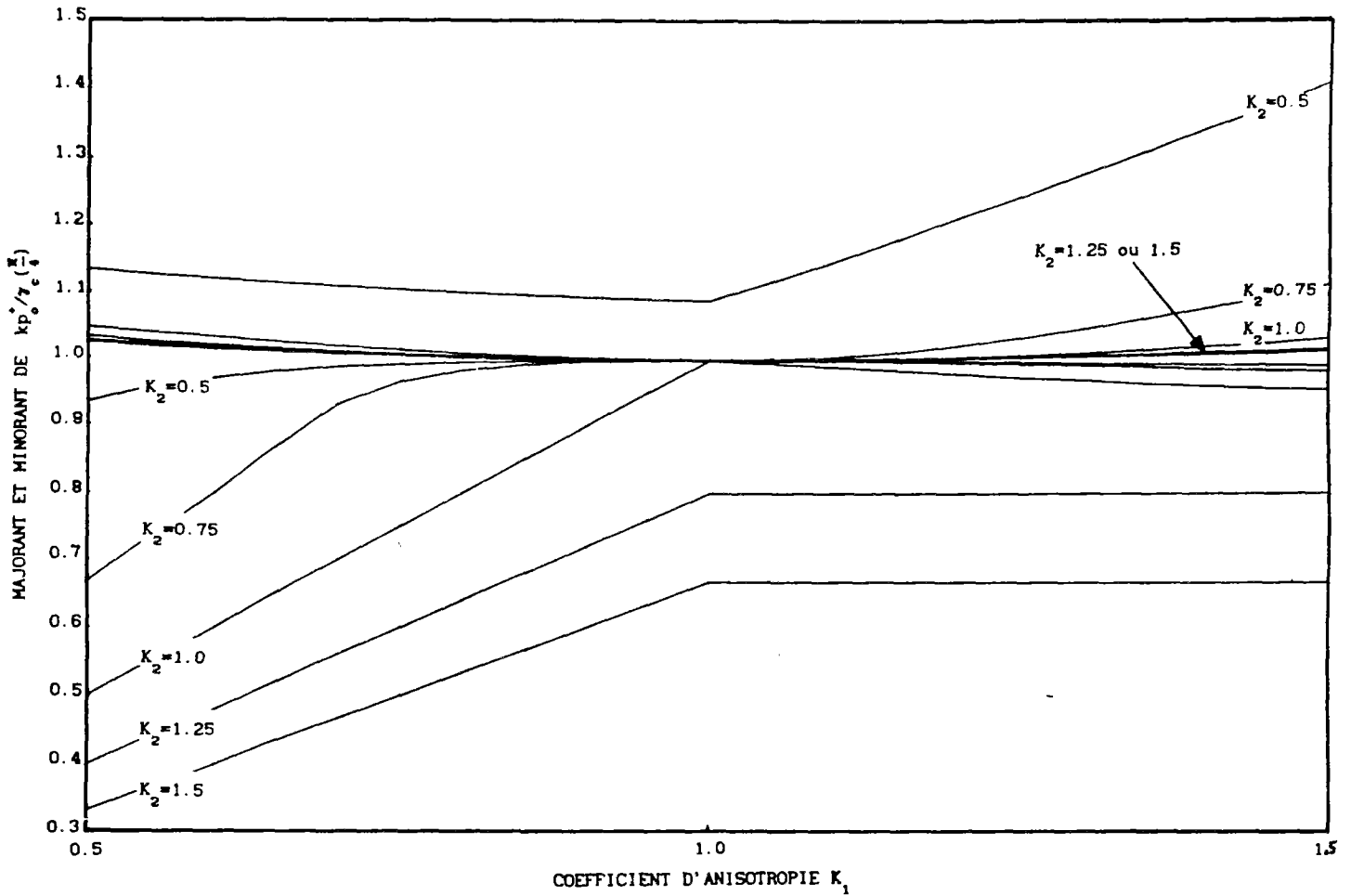


Figure 18. Un premier encadrement de  $L^+$  en fonction de  $K_1$  et  $K_2$

Le calcul du minimum de  $\gamma_c(\cdot)$  est fourni à l'Annexe 6 et les résultats numériques sont représentés graphiquement à la figure 18, conjointement avec ceux de l'approche par l'extérieur. Cependant, il est déjà possible de donner sans calcul une estimation de la

minoration (136). Il suffit de distinguer 3 domaines dans le plan  $(K_1, K_2)$  dans lesquels on connaît approximativement le minimum de  $\gamma_c(.)$ . Ainsi:

$$\begin{aligned}
 &\text{si } K_2 < \inf(1, K_1) : L^+ \geq 1 \text{ car } \gamma_c(\pi/4) \approx \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \gamma_c(\theta) \\
 &\text{si } K_1 < \inf(1, K_2) : L^+ \geq \frac{K_1}{K_2} \text{ car } \gamma_c(\pi/2) \approx \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \gamma_c(\theta) \\
 &\text{si } 1 < \inf(K_1, K_2) : L^+ \geq \frac{1}{K_2} \text{ car } \gamma_c(0) \approx \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \gamma_c(\theta)
 \end{aligned} \tag{137}$$

Ces estimations "à la main" de la minoration (136) selon les valeurs prises par  $K_1$  et  $K_2$  sont résumées à la figure 19 dans le plan  $(K_1, K_2)$ . Elles sont confirmées avec une grande précision par le calcul numérique basé sur l'Annexe 6, comme on peut le vérifier à la figure 18. On compare maintenant les résultats des approches par l'intérieur et l'extérieur de  $p_o^+$ .

### 3.b.2 Un premier encadrement de $p_o^+$

Pour balayer l'ensemble des valeurs prises par les coefficients d'anisotropie  $K_1$  et  $K_2$ , on a choisi de représenter les majorant et minorant de  $p_o^+$  définis par les équations (122) et (136) en fonction de  $K_1$ , pour 5 valeurs de  $K_2$  de 0,5 à 1,5. L'encadrement n'est satisfaisant que pour les valeurs des  $K_1$  situées dans le domaine I de la figure 19. Il est assez naturel de soupçonner l'approche par l'intérieur précédente de fournir "la mauvaise borne" de l'encadrement. En effet, l'usage du champ de contraintes élastiques conduit à une estimation (par défaut) pénalisante de  $p_o^+$  puisqu'elle revient à remplacer le matériau anisotrope par un matériau isotrope dont le gradient de cohésion correspond au minimum de  $\gamma_c(.)$ . Cette approche privilégie donc la direction de faiblesse du matériau.

Si, comme au paragraphe 2.c.3.2, l'on fait l'hypothèse que l'instabilité du massif sous-marin se produit par glissements

superficiels, alors le théorème d'association montre que les directions principales d'un champ de contraintes  $\underline{\sigma} \in L^{-1}(\lambda^+)$  forment l'angle  $\pi/4$  avec la normale au fond marin, au voisinage de celui-ci. Dans ces conditions, il serait naturel que le paramètre  $\gamma_c(\pi/4)$  joue un rôle prépondérant parmi les caractéristiques de la résistance au cisaillement à prendre en compte dans ce problème. En d'autres termes, il est légitime d'espérer un résultat du type (13), en remplaçant  $\gamma_c$  par  $\gamma_c(\pi/4)$ , c'est-à-dire " $L^+ \geq 1$ ". Dans ces conditions, le paramètre  $\inf_{\theta \in \mathbb{R}} \gamma_c(\theta)$  n'aurait aucun rôle particulier à jouer dans l'analyse de la stabilité. Ceci explique les divergences entre la conjecture " $L^+ \geq 1$ " et les résultats fournis par l'approche par l'intérieur "élastique" en dehors de la zone du plan  $(K_1, K_2)$  où  $\pi/4$  coïncide avec la direction de faiblesse (voir figures 18 et 19).

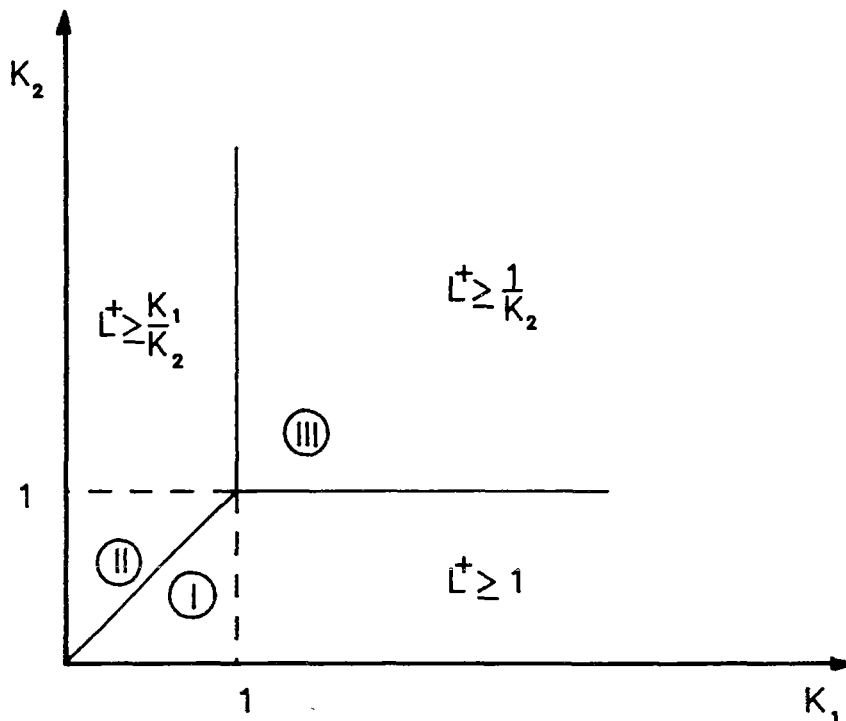


Figure 19. Résultats de l'approche statique élastique

On propose maintenant une nouvelle approche statique par l'intérieur destinée à améliorer la borne inférieure de l'encadrement de  $L^+$ , tout

particulièrement pour des valeurs des  $K_1$  vérifiant  $K_1 \leq \inf(1, K_2)$  ou  $1 \leq \inf(K_1, K_2)$ . Elle repose sur le champ de contraintes discontinu présenté en 2.b.1.4, pour lequel on va voir que l'inclinaison des directions principales au voisinage du fond marin par rapport à la verticale est précisément de  $\pi/4$ .

### 3.b.3 Emploi du champ de contraintes discontinu.

On particularise les expressions des composantes du champ  $\underline{\sigma}^0$  données en (61) dans le cas où  $p_0(x) = \sin kx$ , pour un réel  $\alpha$  donné.

$$\psi \geq -\alpha$$

Pour un point M de coordonnées  $(x, y)$ , les directions principales du tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}^0(M)$  coïncident avec celle du tenseur  $\underline{\sigma}^*(M)$  donné ci-dessous par sa représentation matricielle dans la base  $(\underline{i}, \underline{j})$

$$\hat{\underline{\sigma}}^*(M) = \begin{bmatrix} 0 & k y \cos kx \\ k y \cos kx & -\frac{(ky)^2}{2} \sin kx \end{bmatrix} \quad (138)$$

On désigne de nouveau par  $\delta$  l'angle  $(\underline{j}, \underline{e}_3)$  entre la verticale et la direction principale mineure de  $\underline{\sigma}^0(M)$ . Les calculs de l'annexe 7 fournissent  $\delta = \delta_t^S$ ,  $\delta_t^S$  étant défini par :

$$\delta_t^S = \arctg(t + s\sqrt{1+t^2}) \text{ où } t = -\frac{ky}{4} \operatorname{tg} kx \text{ et } \begin{cases} s=+1 & \text{si } \cos kx < 0 \\ s=-1 & \text{si } \cos kx > 0 \end{cases} \quad (139)$$

Pour les  $x_n = \frac{1}{k}(n\pi + \frac{\pi}{2})$ , le tenseur  $\underline{\sigma}(x_n, y)$  est, au second ordre près en  $y$ , sphérique au voisinage du fond marin. Pour toute valeur de  $x$  différente de  $\frac{1}{k}(n\pi + \frac{\pi}{2})$ , on vérifie que  $\lim_{y \rightarrow 0} t = 0$  et donc  $\lim_{y \rightarrow 0} |\operatorname{tg}(\delta_t^S)| = 1$ . Cela signifie que les directions principales des contraintes au voisinage du fond marin sont inclinées à  $\frac{\pi}{4}$  par rapport à la verticale, comme cela avait été annoncé.

On pose de plus  $A = k\alpha$ ;  $Z = ky$  et  $\varphi = kx$ . Pour assurer la compatibilité du



champ  $\underline{\sigma}$  avec les capacités de résistance du matériau anisotrope dans la zone  $y > -\alpha$ , il faut et il suffit que :

$$k p_o \sqrt{\frac{Z^4}{4} \sin^2 \varphi + 4Z^2 \cos^2 \varphi} \leq 2\gamma_c(\delta_t^S) |Z| \quad (140)$$

soit encore :

$$k p_o \leq \frac{1}{|\cos \varphi|} \cdot \frac{\gamma_c(\delta_t^S)}{\sqrt{1+t^2}} \quad (141)$$

Cette inégalité doit être satisfaite pour toute valeur de  $Z \in [-A, 0]$  et  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . En exprimant  $\varphi$  en fonction de  $t$ , cette condition est équivalente à :

$$(\forall t \in \mathbb{R}) (\forall Z \in [-A, 0]) \quad k p_o \leq \gamma_c(\delta_t^+) \cdot \left\{ \frac{1+(4t/Z)^2}{1+t^2} \right\}^{1/2} \quad (142)$$

La plus restrictive de ces inégalités est obtenue pour  $Z = -A$ :

$$k p_o \leq \inf_{t \in \mathbb{R}} \left[ \gamma_c(\delta_t^+) \cdot \left\{ \frac{1+(4t/A)^2}{1+t^2} \right\}^{1/2} \right] \quad (143)$$

$$y \leq -\alpha$$

La représentation matricielle du tenseur  $\underline{\sigma}(x, y)$  dans la base  $(\underline{i}, \underline{j})$  pour la zone  $y \leq -\alpha$  est déduite de (61). Avec les notations  $A, Z, \varphi$  introduites précédemment, il vient :

$$\hat{\underline{\sigma}}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -A \cos \varphi \\ -A \cos \varphi & -\sin \varphi (1 + \frac{A^2}{2} + AZ) \end{pmatrix} \quad (144)$$

En utilisant de nouveau le calcul de l'annexe 7, on obtient une détermination de  $\delta = (\underline{j}, \underline{e}_3)$  dans la zone définie par  $y \leq -\alpha$ :

$$\delta_t^S = \arctg(t\sqrt{1+t^2}) \text{ où } t = \frac{1+A^2/2+AZ}{2A} \operatorname{tg} \varphi \quad \begin{cases} s=+1 \text{ si } A \cos \varphi < 0 \\ s=-1 \text{ si } A \cos \varphi > 0 \end{cases} \quad (145)$$

La compatibilité des contraintes avec les capacités de résistance dans le domaine  $y < -\alpha$  s'exprime par :

$$k p_o \left\{ \sin^2 \varphi \left(1 + \frac{A^2}{2} + AZ\right)^2 + 4A^2 \cos^2 \varphi \right\}^{1/2} \leq 2\gamma_c(\delta_t^S) \cdot |Z| \quad (146)$$

soit encore

$$k p_o \leq \frac{1}{|\cos \varphi|} \cdot \frac{|Z|}{A} \cdot \frac{\gamma_c(\delta_t^S)}{\sqrt{1+t^2}} \quad (147)$$

pour toutes valeurs de  $Z < -A$  et  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Ces conditions peuvent être reformulées sans faire intervenir explicitement la variable  $\varphi$  :

$$(\forall t \in \mathbb{R}) (\forall Z < -A) \quad k p_o \leq \frac{\gamma_c(\delta_t^+)}{\sqrt{1+t^2}} \cdot f_t(Z) \quad (148)$$

où l'on a posé :

$$f_t(Z) = \frac{|Z|}{A} \left\{ 1 + \left[ \frac{2At}{1+A^2/2+AZ} \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (149)$$

Le calcul de  $g(t) = \inf_{Z < -A} f_t(Z)$  est présenté à l'annexe 6. Finalement la compatibilité du champ  $\underline{\sigma}$  avec les capacités de résistance dans la zone  $y < -\alpha$  s'exprime par :

$$k p_o \leq \inf_{t \in \mathbb{R}} \left[ \gamma_c(\delta_t^+) \cdot \frac{g(t)}{\sqrt{1+t^2}} \right] \quad (150)$$

Si les inégalités (143) et (150) sont satisfaites, alors le massif sous-marin est potentiellement stable. On dispose donc d'une minoration de  $L^+$ :

$$L^+ \geq \inf \left\{ \inf_{t \in \mathbb{R}} \left[ \frac{\gamma_c(\delta_t^+)}{\gamma_c(\frac{\pi}{4})} \cdot \left\{ \frac{1+(4t/A)^2}{1+t^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \right] ; \inf_{t \in \mathbb{R}} \left[ \frac{\gamma_c(\delta_t^+)}{\gamma_c(\frac{\pi}{4})} \cdot \frac{g(t)}{\sqrt{1+t^2}} \right] \right\} \quad (151)$$

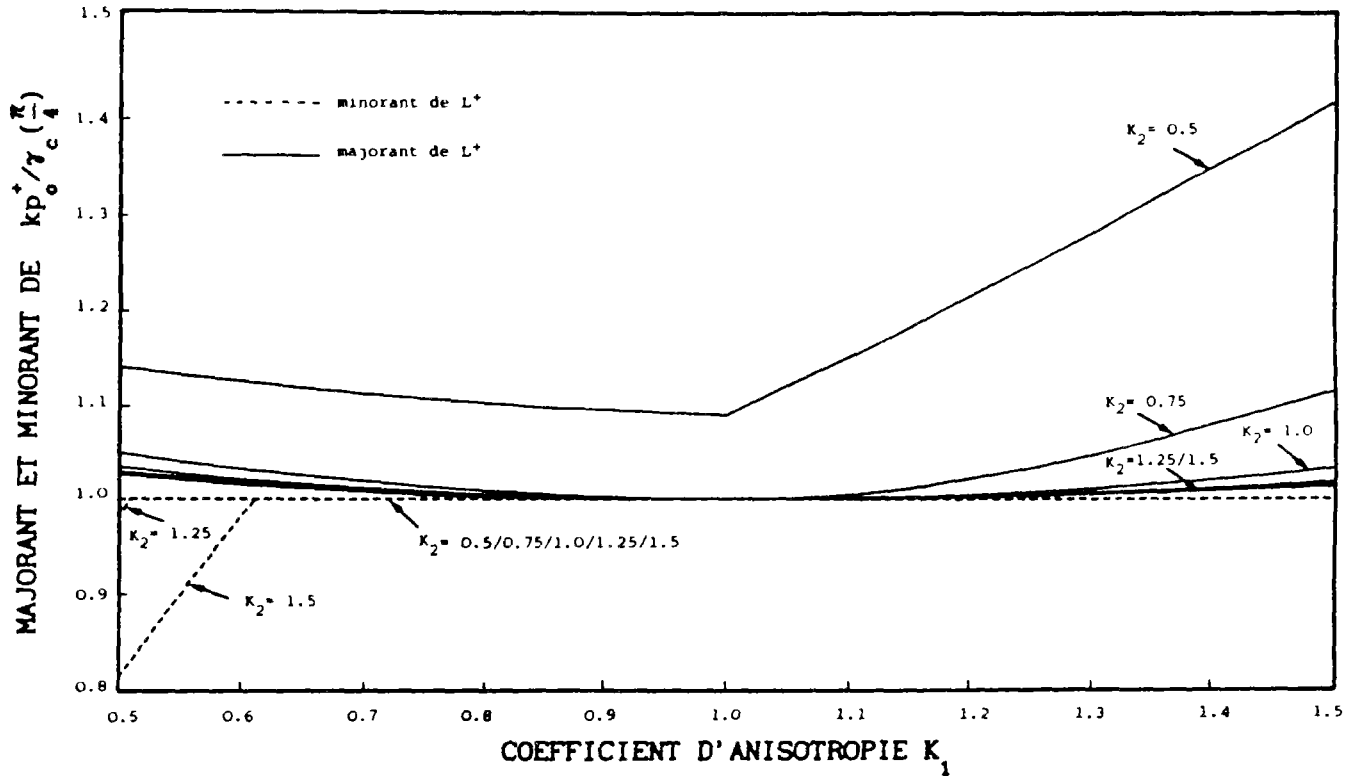


Figure 20. Majorants et minorants de  $L^+$  en fonction de  $K_1$  et  $K_2$

Pour des valeurs données des paramètres d'anisotropie  $K_1$  et  $K_2$ , il s'agit maintenant d'optimiser le choix du paramètre  $A$ . Ce travail est effectué numériquement. Quelques remarques guidant le choix de  $A$  sont présentées à l'annexe 8. Celle-ci met notamment en lumière l'apport du

champ de contraintes discontinu par rapport au champ de contraintes élastiques. En associant le calcul numérique et les considérations de l'Annexe 8, on obtient une minoration de  $L^+$  valable pour toutes valeurs des  $K_1$ :

$$L^+ \geq \inf\left(\sqrt{6} \frac{K_1}{K_2}, \frac{\sqrt{6}}{K_2}, 1\right) \quad (152)$$

La figure 20 rassemble les résultats de l'approche cinématique et de la présente approche par l'intérieur.

#### 4 - LE CRITÈRE HOMOGENÈE ISOTROPE

On étudie maintenant le cas où le massif est constitué par un matériau dont le critère de rupture est un critère de Tresca homogène et isotrope :

$$\sigma_i - \sigma_j - 2C \leq 0 \quad (153)$$

C est un réel positif appelé cohésion. Seul le cas de la houle linéaire  $p(x,t) = p_0 \sin(kx - \omega t)$  sur un fond marin plan horizontal a fait l'objet, pour ce matériau, d'une étude approfondie. Cependant, certains résultats valables pour une houle de forme quelconque seront énoncés.

Si  $p_h(.)$  désigne la fonction de forme de la surpression due à la houle sur le fond marin, la sollicitation sera étudiée comme précédemment dans le cadre du mode de chargement à 1 paramètre  $\lambda$  bâti sur  $\text{vect}(p_h)$ . Pour le cas de la houle linéaire, il s'agit donc du mode de chargement à 1 paramètre  $p_0$  bâti sur  $\text{vect}(\sin kx)$ . Et l'objectif sera de déterminer l'intervalle  $K'_1$  de  $\mathbb{R}$  des valeurs de  $p_0$  potentiellement supportables, puis le domaine  $K_1 = \mathcal{H} \circ \mathcal{P}^{-1}(K'_1)$  dans  $\mathbb{R}^3$  des valeurs H,L,d définissant une houle de projet elle-même "potentiellement supportable".

##### 4.a approche cinématique

###### 4.a.1 un mécanisme déformant tout le massif

###### 4.a.1.1 houle de forme quelconque

Soit  $p_h(.)$  une fonction de forme de pressions  $C^1$  et à support compact. Elle définit un mode de chargement du massif à 1 paramètre  $\lambda$ . On note  $u_h$  la solution du problème suivant:

$$\begin{aligned}
\Delta u_h &= 0 \text{ dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^- \\
u_h(x, 0) &= p_h(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \\
\lim_{OM \rightarrow \infty} u_h(M) &= 0
\end{aligned} \tag{154}$$

Soit maintenant  $f(\cdot)$  une fonction numérique de la variable réelle également  $C^1$  à support compact et  $u$  la solution dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$  du problème (154) où l'on a remplacé  $p_h(\cdot)$  par  $f(\cdot)$ . On examine un champ de vitesses nul à l'infini dont le champ de tenseurs taux de déformations  $\underline{\underline{d}}^f$  est défini par :

$$\underline{\underline{d}}^f = y \begin{bmatrix} -\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{155}$$

L'intégrabilité de  $\underline{\underline{d}}^f$  est assurée par le fait que  $u$  est harmonique. Ce champ  $\underline{\underline{d}}^f$  n'est autre, à un coefficient près, que la solution en taux de déformation dans le cas où le massif, soumis à une "vitesse de pression"  $f(\cdot)$ , est h.i.l.e.. On examine tout d'abord la puissance  $\mathcal{P}_{\text{ext}}^f$  de la pression  $\lambda p_h(\cdot)$  dans le champ de vitesse défini par (155). Le principe des puissances virtuelles permet d'affirmer que :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}^f = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}^f \, d\Omega \tag{156}$$

pour tout champ de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  statiquement admissible avec  $\lambda p_h(\cdot)$ . La solution en contraintes pour le problème élastique fournit un tel champ, dont l'expression en fonction de  $u_h$  a été rappelée à l'équation (44). Il vient :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = 2 \lambda \int_{\Omega} y^2 \text{grad } u \cdot \text{grad } u_h \, d\Omega \tag{157}$$

Par ailleurs, en observant que  $\text{tr} \underline{\underline{d}}^f = 0$ , il est facile de voir que :

$$\pi(\underline{d}) = 2 C |y| \|\underline{\text{grad}} u\| \quad (158)$$

L'expression de la puissance dissipable  $P^f$  en résulte :

$$P^f = 2C \int_{\Omega} |y| \cdot \|\underline{\text{grad}} u\| \, d\Omega \quad (159)$$

Tout choix particulier de  $f(\cdot)$  conduit à une majoration de  $\lambda^+$ :

$$\lambda^+ \leq C \frac{\int_{\Omega} |y| \cdot \|\underline{\text{grad}} u\| \, d\Omega}{\int_{\Omega} y^2 \cdot \underline{\text{grad}} u \cdot \underline{\text{grad}} u_h \, d\Omega} \quad (160)$$

Pour qu'une telle majoration soit non triviale, il est nécessaire que l'intégrale placée au numérateur de (160) soit convergente. L'optimisation de (160) passerait par l'exploration de l'ensemble des fonctions  $f$  pour lesquelles cette propriété est assurée. On va maintenant appliquer cette approche par l'extérieur au cas particulier où  $p_h(x) = \sin kx$ .

#### 4.a.1.2 Application à la houle linéaire

Pour ce choix particulier de  $p_h$ , la solution  $u_h$  de (154) est connue :

$$u_h(x, y) = e^{ky} \sin kx \quad (161)$$

Cependant, la recherche du meilleur majorant de  $\lambda^+$  par (160) n'a pas été tentée. Il est naturel d'examiner le cas particulier  $f=p_h$ . Malheureusement,  $p_h$  n'est pas à support compact et les deux intégrales dans (160) divergent. On est donc amené à modifier quelque peu le champ de vitesses utilisé au paragraphe précédent. Soit donc  $V_n$  le champ de vitesse nul à l'infini, nul en dehors du domaine  $\Omega_n = ]\frac{L}{4}, (n+\frac{1}{4})L[ \times \mathbb{R}^-$  et dont le taux de déformation  $\underline{d}^h$  est donné par (155) pour  $u=u_h$  définie par (161). Ce champ  $V_n$  présente une discontinuité

aux points de  $\Sigma_n = \{\frac{L}{4}, (n+\frac{1}{4})L\} \times \mathbb{R}^-$  (voir figure 21). La puissance de la pression  $p_o \sin kx$  dans  $V_n$  est donnée par le principe des puissances virtuelles :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = \int_{\Omega_n} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}^h dV + \int_{\Sigma_n} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{1}} \cdot [V_n] d\Sigma \quad (162)$$

pour tout champ  $\underline{\underline{\sigma}}$  statiquement admissible avec  $p_o \sin kx$ . quelconque. En choisissant pour  $\underline{\underline{\sigma}}$  la solution du problème élastique, il vient :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = p_o \int_{\Omega_n} \underline{\underline{d}}^h : \underline{\underline{d}}^h dV + \int_{\Sigma_n} \sigma_{xy} [V_y] dy \quad (163)$$

soit encore, en raison de la périodicité spatiale de  $\underline{\underline{\sigma}}$  et  $\underline{\underline{d}}^h$  :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = 2n p_o \int_{L/4}^{5L/4} dx \int_{-\infty}^0 y^2 \|\text{grad } u_h\|^2 dy + \int_{\Sigma_n} \sigma_{xy} [V_y] dy \quad (164)$$

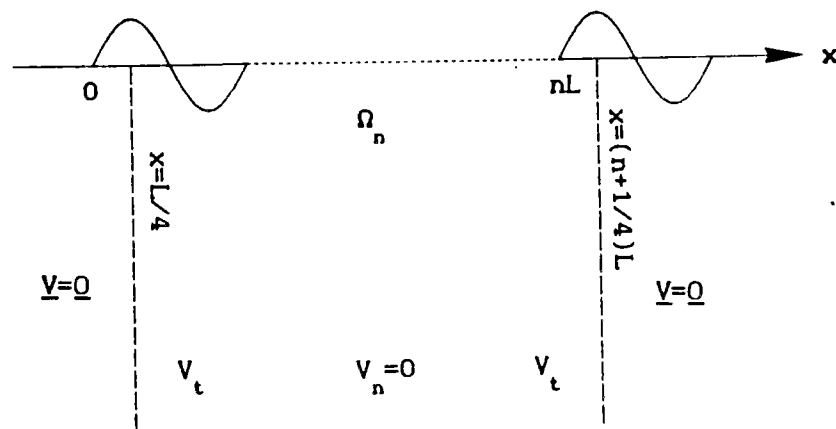


figure 21. Domaine mis en mouvement par le champ  $V_n$

Par ailleurs, il est facile de voir que la puissance dissipable  $P$  est



donnée par :

$$P = 2n C \int_{L/4}^{5L/4} dx \int_{-\infty}^0 y \|\text{grad } u_h\| dy + C \int_{\Sigma_n} [V_y] dy \quad (165)$$

Les intégrales sur  $\Sigma_n$  dans les équations (164) et (165) étant convergentes, le théorème cinématique appliqué à  $V_n$  en faisant tendre  $n$  vers l'infini fournit donc une majoration de  $p_o^+$ :

$$p_o^+ \leq C \frac{\int_{L/4}^{5L/4} dx \int_{-\infty}^0 y^2 \cdot \|\text{grad } u_h^2\| dy}{\int_{L/4}^{5L/4} dx \int_{-\infty}^0 |y| \cdot \|\text{grad } u_h\| dy} \quad (166)$$

Tous calculs faits, il vient :

$$p_o^+ \leq 4 C \quad (167)$$

Dans cette approche cinématique, le massif est déformé jusqu'à l'infini. On examine maintenant des mécanismes dans lesquels seule une zone d'extension finie est mise en mouvement. De tels champs de vitesse seront dits locaux.

#### 4.a.2 Mécanismes locaux

Les calculs qui suivent sont limités au cas de la houle linéaire. Parmi les mécanismes locaux on présente ci-après celui qui a fourni la meilleure majoration de  $p_o^+$ . Les autres sont décrits à l'Annexe 9. On considère la famille des champs de vitesses à 2 paramètres  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  et  $h > 0$ , représentés à la figure 22. Le bloc délimité par le segment AB (de milieu O, origine de l'axe des x) et l'arc AB est animé d'un mouvement de rotation à la vitesse angulaire  $\underline{\omega} = -\omega \underline{k}$  autour du point

$O'$  défini par  $OO' = h/\operatorname{tg}\alpha$ . La vitesse est nulle en dehors de ce bloc. La puissance dissipable par le massif dans ce champ de vitesses  $\underline{V}$  est due à la discontinuité de la vitesse le long de l'arc AB et vaut :

$$P(\underline{V}) = 2 \frac{\alpha}{\sin^2 \alpha} Ch^2 \omega \quad (168)$$

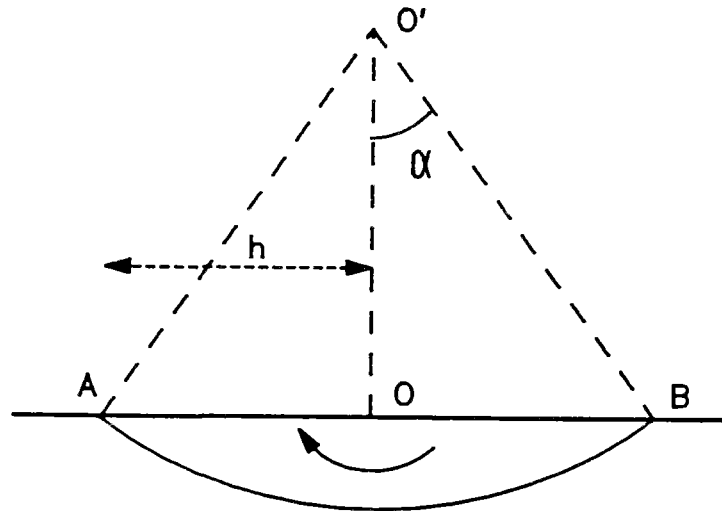


Figure 22. Mécanisme local de rotation de bloc.

En désignant par M le point du segment AB d'abscisse  $x$ , la puissance extérieure  $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\underline{V})$  de la pression  $p_0 \sin kx$  dans le champ de vitesses  $\underline{V}$  est définie par :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}(\underline{V}) = - \int_{-h}^{+h} p_0 \sin kx \underline{j} \cdot \underline{V}(M) dx \quad (169)$$

soit encore :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}(\underline{V}) = 2 \frac{p_0 \omega}{k^2} (\sin kh - kh \cos kh) \quad (170)$$

A partir des équations (168) et (170), le théorème cinématique fournit une majoration de  $p_0^+$  pour chaque valeur de  $\alpha$  et  $h$  :

$$(\forall \alpha \in ]0, \pi/2[)(\forall h > 0) \quad p_0^+ \leq C \frac{\alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{(kh)^2}{(\sin kh - kh \cos kh)} \quad (171)$$

La majoration la plus restrictive est obtenue pour  $\alpha=1,15$  et  $h=2,1/k$ . Pour ces valeurs des paramètres, on obtient :

$$p_0^+ \leq 3,16 C \quad (172)$$

qui améliore sensiblement le résultat obtenu par le mécanisme de déformation du massif. On observe que les dimensions du volume de matériau mis en mouvement dans le mécanisme optimal de la famille envisagée dépendent de la longueur d'onde de la houle. Ce point constitue une première différence avec le résultat obtenu pour le critère linéaire, où le mécanisme optimal est évanescent. Une deuxième différence apparaît lorsque l'on compare la structure des majorations (172) et (22) : contrairement au cas du critère linéaire, la majoration (172) de  $p_0^+$  (comme (167)) est indépendante des caractéristiques de la houle. Dans le cas du critère linéaire, (22) a permis de montrer que la cambrure  $\frac{H}{L}$  de la houle linéaire était le paramètre conditionnant la stabilité du fond marin (pour une profondeur d'eau donnée). La structure de (167) et (172) indique que, pour le critère homogène, c'est la hauteur  $H$  de la vague qui va jouer ce rôle de paramètre de stabilité.

#### 4.b Approche statique

##### 4.b.1 Houle de forme quelconque

On considère de nouveau une fonction de forme  $p_h(.)$ . L'on étudie la stabilité du massif dans le mode de chargement à 1 paramètre  $\lambda$  construit sur  $\text{vect}(p_h)$ . On va proposer dans ce qui suit 3 types de champs de contraintes statiquement admissibles avec la pression  $\lambda p_h(.)$ , à partir desquels une approche statique par l'intérieur de  $\lambda^+$

pourra être réalisée.

#### 4.b.1.1 Un champ de contraintes uniaxial

Soit tout d'abord le champ de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  dont la matrice  $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}$  dans la base  $(\underline{i}, \underline{j})$  est définie ci-dessous :

$$\hat{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\lambda p_h(x) \end{bmatrix} \quad (173)$$

Ce champ  $\underline{\underline{\sigma}}$  est manifestement statiquement admissible avec  $\lambda p_h(.)$ . Pour qu'il soit compatible en tout point du massif avec les capacités de résistance du matériau, il faut et il suffit que :

$$(\forall x \in R) \lambda |p_h(x)| \leq 2C \quad (174)$$

Il en résulte immédiatement une première minoration de  $\lambda^+$ :

$$\lambda^+ \geq \frac{2}{\sup_{x \in R} |p_h(x)|} C \quad (175)$$

#### 4.b.1.2 le champ de contraintes élastiques

Une autre approche statique de  $\lambda^+$  peut être réalisée simplement au moyen de la solution en contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}^{el}$  pour le cas où le massif supposé élastique incompressible est soumis à la pression  $\lambda f_0(.)$ . En notant comme précédemment  $u_h$  la solution du problème (154) avec  $f=p_h$ , la représentation matricielle  $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}^{el}$  de  $\underline{\underline{\sigma}}^{el}$  est :

$$\hat{\underline{\underline{\sigma}}}^{el} = \lambda \begin{bmatrix} -u_h - y \frac{\partial u_h}{\partial y} & y \frac{\partial u_h}{\partial x} \\ y \frac{\partial u_h}{\partial x} & -u_h + y \frac{\partial u_h}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (176)$$

Pour que  $\underline{\underline{\sigma}}^{el}$  soit compatible en tout point du massif avec les capacités de résistance du matériau, il faut et il suffit que :

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^-) \lambda |y| \cdot \|\text{grad } u_h(x,y)\| \leq C \quad (177)$$

Une nouvelle minoration de  $\lambda^+$  en résulte :

$$\lambda^+ \geq \frac{C}{\sup_{\Omega} |y| \cdot \|\text{grad } u_h(x,y)\|} \quad (178)$$

Le calcul du dénominateur dans (178) peut être effectué numériquement à partir des expressions des quantités  $\frac{\partial u_h}{\partial x}$  et  $\frac{\partial u_h}{\partial y}$  qui ont été données au Chapitre II.

#### 4.b.1.3 une famille de champs s.a. construit sur un espace de fonctions

Soit  $H$  l'ensemble des fonctions numériques définies sur  $\mathbb{R}^-$ , de classe  $C^1$ , et s'annulant en 0; et soit  $g$  un élément de  $H$ . On considère le champ de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  donné ci-dessous en tout point de  $\Omega$  par sa représentation matricielle  $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}$  dans la base  $(\underline{i}, \underline{j})$ .

$$\hat{\underline{\underline{\sigma}}} = \lambda \begin{pmatrix} -p_h(x)g'(y) & p_h'(x)g(y) \\ p_h'(x)g(y) & -p_h(x) - p_h''(x) \int_0^y g(t)dt \end{pmatrix} \quad (179)$$

Il est facile de vérifier que  $\underline{\underline{\sigma}}$  est statiquement admissible avec  $\lambda p_h(\cdot)$ . Lorsque  $g$  décrit l'ensemble  $H$ , on génère ainsi une famille de champs de contraintes s.a. avec  $\lambda p_h(\cdot)$ . En particulier, le choix  $g=0$  redonne le champ uniaxial introduit précédemment. Chaque valeur de  $g$  fournit une minoration de  $\lambda^+$ . Il s'agit d'optimiser le choix de cette fonction. Ce travail sera effectué au paragraphe suivant pour la houle linéaire.

#### 4.b.2 Application à la houle linéaire

On se propose de mettre en oeuvre les approches statiques précédentes dans le cas particulier où  $p_h(x) = \sin kx$ . En appliquant la minoration (175), on obtient immédiatement :

$$p_o^+ \geq 2 C \quad (180)$$

En associant (172) et (180), on obtient un premier encadrement de  $p_o^+$ . Bien que le champ de contrainte uniaxial utilisé pour établir (175) soit d'une grande simplicité, la minoration qui en résulte dans le cas de la houle linéaire n'est pas inintéressante. On va cependant l'améliorer au moyen de la minoration (178), qui repose sur le champ de contraintes élastiques. L'expression de la solution  $u_h$  de (154) pour  $p_h(x) = \sin kx$  a été donnée en (161). On obtient :

$$p_o^+ \geq \frac{C}{\sup_{y < 0} |ky e^{ky}|} = eC = 2.71 C \quad (181)$$

Il reste maintenant à utiliser les champs de contraintes construits sur  $H$ . Pour un élément  $g$  de  $H$ , on pose  $h(y) = kg(y/k)$  et  $G(y) = \int_0^y h(t) dt$ . lorsque  $g$  décrit  $H$ ,  $G$  décrit l'ensemble  $\hat{H}$  des fonctions de Classe  $C^2$  nulles et de dérivées nulles en 0. La représentation matricielle  $\hat{\underline{g}}$  dans la base  $(\underline{i}, \underline{j})$  du champ de contraintes  $\underline{g}$  s.a. avec  $p_o \sin kx$  et construit à partir de  $g$  est déduite de (179) :

$$\hat{\underline{g}} = p_o \begin{bmatrix} -G''(ky) \sin kx & G'(ky) \cos kx \\ G'(ky) \cos kx & (G(ky) - 1) \sin kx \end{bmatrix} \quad (182)$$

Pour que le champ de contraintes  $\underline{g}$  soit compatible en tout point du massif avec les caractéristiques de résistance du matériau, il faut et il suffit que :

$$(\forall x, \forall y < 0) p_o \left\{ \sin^2 kx (G(ky) + G''(ky) - 1)^2 + 4 \cos^2 kx G'(ky)^2 \right\}^{1/2} \leq 2C \quad (183)$$

il en résulte que :

$$(\forall G \in \hat{H}) p_o^+ \geq C \inf \left[ \inf_{y < 0} \frac{2}{|G(y) + G''(y) - 1|} ; \inf_{y < 0} \frac{1}{|G'(y)|} \right] \quad (184)$$

On examine tout d'abord une classe particulière d'éléments de  $\hat{H}$ . Soit un réel  $t$  et  $G_t$  l'élément de  $\hat{H}$  solution de l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} (\forall y \leq 0) \quad G(y) + G''(y) - 1 &= t \\ G(0) = G'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (185)$$

Il est facile de voir que  $G_t(y) = (1+t)(1 - \cos y)$  et par suite :

$$\inf_{y < 0} \frac{1}{|G'_t(y)|} = \frac{1}{|1+t|} \quad (186)$$

En appliquant (184) au sous-ensemble de  $\hat{H}$  obtenu lorsque  $t$  décrit  $\mathbb{R}$ , il vient :

$$p_o^+ \geq C \sup_{t \in \mathbb{R}} \left[ \inf \left( \frac{2}{|t|}, \frac{1}{|1+t|} \right) \right] \quad (187)$$

La figure (23) montre que le maximum de la fonction  $\inf \left[ \frac{2}{|t|}, \frac{1}{|1+t|} \right]$  est atteint lorsque  $2/|t| = 1/|1+t|$ , soit  $t = -\frac{2}{3}$ . Il vient :

$$p_o^+ \geq 3 C \quad (188)$$

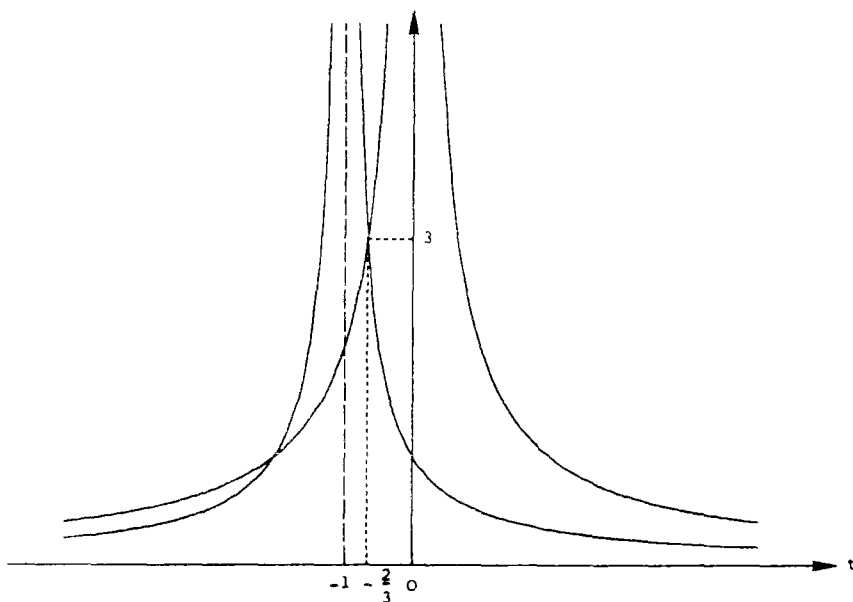


Figure 23. Recherche du réel  $t$  optimisant la minoration (187)

On se propose maintenant de prouver que la fonction  $G_{-2/3}$  constitue en fait le choix optimal dans  $\hat{H}$ , au sens où il conduit à la meilleure

minoration de  $p_0^+$  parmi toutes celles définies par (184).

On considère l'application  $\varphi$  de l'ensemble  $C^0(\mathbb{R}^-)$  des fonctions numériques définies sur  $\mathbb{R}^-$  et continues, dans  $\hat{H}$  qui a un élément  $f$  de  $C^0(\mathbb{R}^-)$  associe la solution de l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} (\forall y \leq 0) \quad G(y) + G''(y) - 1 &= f(y) \\ G(0) = G'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (189)$$

Il est facile de voir que  $\varphi$  est bijective. On peut d'ailleurs établir une expression analytique de  $\varphi(f)$  (voir Annexe 10) :

$$\varphi(f)(y) = \int_0^y \sin(y-t) \cdot (f(t)+1) dt \quad (190)$$

Pour qu'une fonction  $G$  de  $\hat{H}$  conduise à une minoration de  $p_0^+$  meilleure que (188), il faut donc que la fonction  $f = \varphi^{-1}(G)$  vérifie :

$$\inf_{y \leq 0} \frac{2}{|f(y)|} \geq 3 \quad (191)$$

Cette condition fournit un encadrement de  $f(y)$  :

$$(\forall y \leq 0) \quad -2/3 \leq f(y) \leq 2/3 \quad (192)$$

A partir de l'expression (190) de  $G$ , le calcul de  $G'$  donne :

$$G'(y) = \int_0^y \cos(y-t) \cdot (f(t)+1) dt \quad (193)$$

En vertu de l'encadrement (192) à vérifier par  $f$ , la quantité  $\cos(t+\frac{\pi}{2})(f(t)+1)$  est positive pour toute valeur de  $t \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ . Il en résulte que :

$$|G'(\frac{\pi}{2})| = \int_{-\pi/2}^0 \cos(t+\frac{\pi}{2}) \cdot (f(t)+1) dt \quad (194)$$

En utilisant de nouveau (192) dans (194), il vient :



$$|G'(\frac{\pi}{2})| \geq \frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^0 \cos(t+\frac{\pi}{2}) dt = \frac{1}{3} \quad (195)$$

ce qui prouve que :

$$\inf_{y \leq 0} \frac{1}{|G'(y)|} \leq 3 \quad (196)$$

et achève de démontrer que :

$$\sup_{G \in \hat{H}} \left\{ \inf \left[ \inf_{y < 0} \frac{2}{|G(y)+G''(y)-1|} ; \inf_{y < 0} \frac{1}{|G'(y)|} \right] \right\} = 3 \quad (197)$$

Le choix de  $G_{-2/3}$  est donc optimal dans  $\hat{H}$ . En associant (172) et (188), on obtient un encadrement de  $p_o^+$ :

$$3 \leq p_o^+/C \leq 3,16 \quad (198)$$

En fixant arbitrairement  $p_o^+=3C$ , l'erreur commise est au plus de 5% . Avec ce choix, les triplets (H,L,d) potentiellement supportables sont caractérisés par :

$$\frac{H}{L} \leq \frac{6C}{L\gamma_w} .ch(kd) \quad (199)$$

En comparant (199) à (24), il apparaît que le domaine  $K_1$  correspondant au massif homogène de cohésion C coïncide avec le domaine  $K_1$  correspondant au massif hétérogène de gradient de cohésion  $\gamma_c=3kC$ . Cette observation permet de déterminer les houles linéaires possibles et potentiellement supportables par un massif sous-marin homogène de cohésion donnée à partir de la figure 5.

Une approche plus fine de la stabilité d'un massif de sol surconsolidé consisterait à adopter un critère de rupture de Tresca "affine", caractérisé par la donnée de la cohésion de surface  $C(0)$ , et le gradient de cohésion  $\gamma_c$  :

$$C(y)=C(0)-\gamma_c y \quad (200)$$

Cette étude n'est pas développée dans le cadre de ce mémoire.

Cependant, il convient de noter que l'application de la méthode de superposition introduite par Salençon et Matar (1982) permet d'obtenir sans calcul un minorant de  $p_o^+$  en exploitant les minoration de la charge extrême dans (22) et (198) :

$$p_o^+ \geq 3C(0) + \gamma_c / k \quad (201)$$

## 5 - CONCLUSION

La présente étude a dégagé des conditions de stabilité pour un massif sous-marin constitué d'un sol cohérent et soumis à l'action de la houle. Pour modéliser les capacités de résistance d'un sol fin normalement consolidé ou surconsolidé, des critères de rupture de Tresca respectivement linéaire (en fonction de la profondeur dans le massif) et homogène ont été retenus. Des résultats nettement différenciés ont été obtenus selon le type de critère de rupture.

### *Critère de rupture linéaire*

Dans le cas du critère de rupture linéaire, la cambrure  $H/L$  apparaît comme le paramètre caractérisant la houle du point de vue de la stabilité, lorsque la sollicitation est modélisée par une théorie de Stokes. Lorsqu'elle est définie par une pression de forme quelconque, le paramètre de la houle conditionnant la stabilité n'est autre que la dérivée de cette pression le long du fond marin. Pour les applications pratiques où le projeteur étudie la réponse d'un massif donné sous l'action de la houle de projet caractérisée par la hauteur des vagues  $H$ , et la longueur d'onde  $L$  pour une profondeur d'eau donnée, le domaine des valeurs de  $H$  et  $L$  provoquant l'instabilité a été déterminé exactement pour la théorie de Stokes d'ordre 1 et presque exactement pour la théorie d'ordre 2.

Le poids volumique du matériau n'influence la stabilité du massif que si celui-ci est incliné. C'est alors le poids volumique "déjaugé"  $\gamma'$  qui intervient. Plus précisément la stabilité d'un massif incliné selon l'angle  $\chi$  avec l'horizontale peut être déduite de celle d'un massif horizontal constitué par le même matériau en ajoutant la quantité  $\gamma' \sin \chi$  à la dérivée (le long du fond marin) de la surpression due à la houle.

Pour tenir compte de l'anisotropie du matériau, il est nécessaire de caractériser les capacités de résistance par le gradient de cohésion  $\gamma_c(\frac{\pi}{4})$ . Pratiquement, cela signifie que la cohésion à prendre en considération dans les calculs de stabilité, si elle est mesurée à l'appareil triaxial, doit être déduite d'essais de compression réalisés sur des échantillons formant en place l'angle  $\frac{\pi}{4}$  avec la verticale.

#### *critère de rupture homogène*

La stabilité d'un massif sous-marin constitué par un matériau de capacités de résistance modélisées par un critère de rupture homogène a fait l'objet d'une étude plus sommaire. Néanmoins, elle a permis de mettre en évidence l'importance que revêt le choix du critère de rupture. C'est ici la hauteur  $H$  des vagues, et non plus la cambrure, qui caractérise l'effet de la houle sur la stabilité du massif sous-marin à une profondeur relative donnée. Si la sollicitation est définie par une pression  $p(.)$  de forme quelconque, le critère de stabilité porte sur la valeur maximale de  $|p(.)|$  (et non plus sur celle de la dérivée de  $p(.)$ ).

Pour les applications pratiques, on donne la solution du problème de la stabilité sous l'action de la houle de Stokes d'ordre 1. Le massif homogène caractérisé par la cohésion  $C$  du matériau constitutif et le massif hétérogène de gradient de cohésion  $\gamma_c = 3kC$  sont identiques du point de vue de la stabilité.

## ANNEXE 1 . Critère de Tresca et fonction $\pi(\underline{n}, \underline{V})$ en déformation plane.

### a. Définition du critère de Tresca en déformation plane.

La théorie du Calcul à la Rupture en déformation plane a été introduite par Salençon (1983). Soit  $\underline{\sigma}$  un tenseur de contraintes du plan  $(\underline{i}, \underline{j})$ . On désigne par  $\sigma_1$  et  $\sigma_3$  ses contraintes principales respectivement majeure et mineure, et par  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_3$  des vecteurs unitaires définissant les directions principales correspondantes. On note encore  $\delta$  l'angle  $(\underline{j}, \underline{e}_3)$  formé par la direction principale mineure avec la verticale. Etant donnée une fonction numérique  $C(\cdot)$ , on dit que  $\underline{\sigma}$  est compatible avec les capacités de résistance définies par  $C(\cdot)$  si :

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq 2C(\delta) \quad (\text{A1.1})$$

La fonction  $C(\cdot)$  est appelée cohésion du matériau. Elle définit par (A1.1) un critère de rupture sur les tenseurs de contraintes. Celui-ci est dit isotrope lorsque  $C(\cdot)$  se réduit à une constante ; il est anisotrope dans le cas contraire. On note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des tenseurs qui satisfont (A1.1).

### b. calcul de la fonction $\pi(\underline{n}, \underline{V})$ associée

On reproduit ici le calcul effectué par Salençon et Tristan-Lopez (1981). Soit  $\underline{n}$  un vecteur unitaire du plan  $(\underline{i}, \underline{j})$  et  $\varepsilon = (\underline{i}, \underline{n})$ . On note  $\underline{t}$  le vecteur unitaire du plan pour lequel  $(\underline{t}, \underline{n})$  est un dièdre direct. Etant donné un vecteur  $\underline{V}$  du plan, on recherche :

$$\pi(\underline{n}, \underline{V}) = \sup(\underline{V} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} ; \underline{\sigma} \in \mathcal{S}) \quad (\text{A1.2})$$

En désignant par  $\tau$  et  $\sigma_n$  (resp.  $V_t$  et  $V_n$ ) les coordonnées du vecteur  $\underline{\sigma} \cdot \underline{n}$  (resp.  $\underline{V}$ ) dans la base  $(\underline{t}, \underline{n})$ , la définition précédente de  $\pi(\underline{n}, \underline{V})$  peut être reformulée :

$$\pi(\underline{n}, \underline{V}) = \sup(\sigma_n V_n + \tau V_t ; \underline{\sigma} \in \mathcal{G}) \quad (\text{A1.3})$$

Si  $V_n \neq 0$ , le tenseur  $\underline{\sigma} = \lambda \frac{|V_n|}{V_n} \cdot \underline{I}_2$  vérifie manifestement (A1.1) pour toutes valeurs de  $\lambda$ . Comme  $\underline{\sigma} \cdot \underline{n} \cdot \underline{V} = \lambda |V_n|$  peut prendre des valeurs arbitrairement grandes, on voit que  $\pi(\underline{n}, \underline{V}) = +\infty$ . On suppose maintenant que  $V_n = 0$ . Soit  $\underline{\sigma}$  un élément quelconque de  $\mathcal{G}$  et  $\delta = (\underline{j}, \underline{e}_3)$ . Il est facile de voir que :

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cdot \sin 2(\delta - \epsilon) \quad (\text{A1.4})$$

En utilisant (A1.4) dans la définition de  $\pi(\underline{n}, \underline{V})$  donnée en (A1.3), il vient :

$$\pi(\underline{n}, \underline{V}) = \sup_{\underline{\sigma} \in \mathcal{G}} \left[ V_t \cdot \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cdot \sin 2(\delta - \epsilon) \right] \quad (\text{A1.5})$$

La quantité  $\sigma_1 - \sigma_3$  étant majorée par  $2C(\delta)$  pour les éléments de  $\mathcal{G}$ , il vient finalement :

$$\pi(\underline{n}, \underline{V}) = \sup_{\delta} \{ V_t C(\delta) \sin 2(\delta - \epsilon) \} \quad (\text{A1.6})$$

En distinguant selon le signe de  $V_t$ , il est possible de factoriser  $\|\underline{V}\| = |V_t|$  dans l'expression de  $\pi(\underline{n}, \underline{V})$  :

$$\text{-si } V_t > 0 : \pi(\underline{n}, \underline{V}) = \|\underline{V}\| \sup \{ C(\delta) \sin 2(\delta - \epsilon) \} = \|\underline{V}\| \cdot \pi_+(\epsilon) \quad (\text{A1.7})$$

$$\text{-si } V_t < 0 : \pi(\underline{n}, \underline{V}) = \|\underline{V}\| \sup \{ C(\delta) \sin 2(\epsilon - \delta) \} = \|\underline{V}\| \cdot \pi_-(\epsilon)$$

Les fonctions  $\pi_+(\epsilon)$  et  $\pi_-(\epsilon)$  introduites dans (A1.7) présentent l'avantage de ne pas dépendre du vecteur  $\underline{V}$ . Elles ont été étudiées et représentées graphiquement pour différentes valeurs des  $K_1$  par Salençon et Tristan-Lopez (1981). En particulier, la fonction  $C(\cdot)$  étant paire, il est facile de vérifier que  $\pi_+(\epsilon) = \pi_-(\epsilon)$ .

## ANNEXE 2.

Calcul de  $\frac{\partial u_h}{\partial y}(x, 0)$

Il s'agit de démontrer l'égalité :

$$\frac{\partial u_h}{\partial y}(a, 0) = \frac{1}{\pi} \text{vp} \frac{1}{x} \left[ p'_h(a+) \right] \quad (\text{A2.1})$$

où  $p_h(\cdot)$  est une fonction numérique de la variable réelle,  $C^2$  à support compact), et  $u_h$  est la solution du problème :

$$\begin{aligned} \Delta u_h &= 0 && \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u_h &= p_h && \text{dans } \mathbb{R} \times \{0\} \\ \lim_{M \rightarrow \infty} u_h(M) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A2.2})$$

On rappelle que  $\text{vp} \frac{1}{x}$  désigne la distribution appelée valeur principale de Cauchy définie par :

$$(\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})) \quad \text{vp} \frac{1}{x} (\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \quad (\text{A2.3})$$

La démonstration s'appuie sur l'Annexe 6 du Chapitre II. Elle repose sur les propriétés (1) et (2) qui y sont définies et le fait que  $p_h$  soit à support compact. On a donc

$$\frac{\partial u_h}{\partial y}(a, 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|X-a| > \varepsilon} \frac{p(X) - p(a)}{(X-a)^2} dX \quad (\text{A2.4})$$

En intégrant par parties dans l'intégrale de droite, il vient :

$$\int_{|X-a| > \varepsilon} \frac{p(X) - p(a)}{(X-a)^2} dX = - \int_{|X-a| > \varepsilon} \frac{p'(X)}{X-a} dX + \left[ \frac{p(X) - p(a)}{X-a} \right]_{a+\varepsilon}^{+\infty} + \left[ \frac{p(X) - p(a)}{X-a} \right]_{-\infty}^{a-\varepsilon} \quad (\text{A2.5})$$

Comme  $p(\cdot)$  est à support compact, les limites quand  $X \rightarrow \pm\infty$  dans (A2.5) sont nulles. Il vient

$$\int_{|X-a|>\varepsilon} \frac{p(X)-p(a)}{(X-a)^2} dX = - \int_{|u|>\varepsilon} \frac{p'(a+u)}{u} du + \frac{p(a+\varepsilon)-p(a)}{\varepsilon} + \frac{p(a-\varepsilon)-p(a)}{\varepsilon} \quad (A2.6)$$

Soit enfin

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|X-a|>\varepsilon} \frac{p(X)-p(a)}{(X-a)^2} dX = \text{vp} \frac{1}{x} [p'_h(a+.)] \quad (A2.7)$$

qui établit (A2.1) en vertu de (A2.4)

continuité de  $\frac{\partial u_h}{\partial y}(x,y)$  en  $y=0$

Il s'agit maintenant de démontrer l'égalité :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial u_h}{\partial y}(a,y) = \frac{1}{\pi} \text{vp} \frac{1}{x} [p'_h(a+.)] \quad (A2.8)$$

On a, par définition de  $u_h(x,y)$  :

$$u_h(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p_h(X) \frac{\cos \theta}{R} dX \quad (A2.9)$$

où  $\cos \theta = -y/R$  et  $R = \sqrt{(x-X)^2 + y^2}$ . A l'aide du changement de variable  $\alpha = \frac{X-x}{y}$ , il est facile de voir que:

$$\frac{\partial u_h}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p'_h(x+\alpha y) \frac{\alpha d\alpha}{1+\alpha^2} \quad (A2.10)$$

En retournant à la variable d'intégration  $X=x+\alpha y$ , il vient alors :

$$\frac{\partial u_h}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p'_h(X) \frac{x-X}{(x-X)^2 + y^2} dX = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p'_h(u+x) \frac{udu}{u^2 + y^2} \quad (A2.11)$$

On introduit alors les notations suivantes :

$$\begin{aligned} f(u) &= p'_h(u+x) \\ g(u) &= (f(u) - f(0))/u \text{ pour } u \neq 0 \\ g(0) &= f'(0) \end{aligned} \quad (A2.12)$$



La fonction  $f$  étant dérivable en 0,  $g$  est borné sur  $\mathbb{R}$  et l'on pose  $G = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$ . Etant donné un réel  $\beta > 0$ , il est possible d'exhiber  $\varepsilon < \beta$  tel que :

$$\left| \text{vp} \frac{1}{x}(f) - \int_{|u| > \varepsilon} \frac{f(u)}{u} du \right| < \beta \quad (\text{A2.13})$$

On scinde alors l'expression intégrale de  $\frac{\partial u_h}{\partial y}(x, y)$  en deux contributions:

$$\pi \frac{\partial u_h}{\partial y}(x, y) = \int_{|u| > \varepsilon} \frac{uf(u)}{u^2 + y^2} du + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{uf(u)}{u^2 + y^2} du \quad (\text{A2.14})$$

soit encore :

$$\pi \frac{\partial u_h}{\partial y}(x, y) = \int_{|u| > \varepsilon} \frac{uf(u)}{u^2 + y^2} du + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{u^2 g(u)}{u^2 + y^2} du + f(0) \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{udu}{u^2 + y^2} \quad (\text{A2.15})$$

Le 3ème terme du membre de droite de (A2.15) est nul. Le 2ème terme est borné en valeur absolue par  $2\varepsilon G$ . Il vient :

$$\left| \pi \frac{\partial u_h}{\partial y}(x, y) - \int_{|u| > \varepsilon} \frac{f(u)}{u} du \right| \leq I(y, \varepsilon) + 2\varepsilon G \quad (\text{A2.16})$$

où l'on a posé :

$$I(y, \varepsilon) = \left| \int_{|u| > \varepsilon} \frac{uf(u)}{u^2 + y^2} du - \int_{|u| > \varepsilon} \frac{f(u)}{u} du \right| \quad (\text{A2.17})$$

Soit alors  $K$ , le support de la fonction  $f(\cdot)$  et  $K' = K - [-\varepsilon, +\varepsilon]$ . On note  $I_K$ , la fonction indicatrice de  $K'$  définie par :

$$\begin{aligned} I_{K'}(x) &= 0 & \text{si } x \notin K' \\ I_{K'}(x) &= 1 & \text{si } x \in K' \end{aligned} \quad (\text{A2.18})$$

On observe que :

$$(\forall (u, y) \in \mathbb{R}^2) \quad \left| \frac{uf(u)}{u^2 + y^2} \right| \leq \frac{f(u)}{u} I_{K'}(u) \quad (A2.19)$$

$K'$  étant borné, la fonction du membre de droite de (A2.19) est intégrable. Le théorème de la convergence dominée s'applique donc :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{|u| > \varepsilon} \frac{uf(u)}{u^2 + y^2} du = \int_{|u| > \varepsilon} \frac{f(u)}{u} du \quad (A2.20)$$

soit encore :

$$(\exists \varepsilon' > 0) \quad |y| < \varepsilon' \Rightarrow |I(y, \varepsilon)| < \beta \quad (A2.21)$$

En associant (A2.13), (A2.18) et (A2.21), on voit que :

$$(\forall \beta > 0)(\exists \varepsilon' > 0) \quad |y| < \varepsilon' \Rightarrow \left| \pi \frac{\partial u_h}{\partial y}(x, y) - \text{vp} \frac{1}{x}(f) \right| < 2\beta(G+1) \quad (A2.22)$$

ce qui achève de démontrer le résultat annoncé en (A2.8).

### ANNEXE 3. Calculs de $\lambda_s$ et $\lambda_c$

#### a. Calcul de $\lambda_s$

On pose :

$$F_1(\varphi) = \frac{\gamma_c/k}{\sqrt{\{\sin\varphi + 2\operatorname{tg}\beta\sin 2\varphi\}^2 + K^2/16 \cdot \{\cos\varphi + 4\operatorname{tg}\beta\cos 2\varphi\}^2}} \quad (\text{A3.1})$$

$$G(\varphi, Z) = \frac{\gamma_c/k}{\sqrt{\{\sin\varphi + 2\operatorname{tg}\beta\sin 2\varphi\}^2 + 1/4K^2 \cdot \{\cos\varphi(1 + K(\frac{K}{2} + Z)) + \operatorname{tg}\beta\cos 2\varphi(1 + 4K(\frac{K}{2} + Z))\}^2}}$$

Par définition,  $\lambda_s(\beta)$  est la plus grande valeur du réel positif  $\lambda$  vérifiant simultanément les inégalités :

$$(\forall \varphi \in [0, 2\pi]) (\forall Z < -K) \quad \begin{cases} \lambda \leq F_1(\varphi) \\ \lambda \leq G(\varphi, Z) \end{cases} \quad (\text{A3.2})$$

En d'autres termes,  $\lambda_s(\beta)$  n'est autre que:

$$\lambda_s(\beta) = \inf(\mathcal{F}_1; \mathcal{F}_2) \quad (\text{A3.3})$$

avec les notations suivantes:

$$\mathcal{F}_1 = \inf_{\varphi \in [0, 2\pi]} F_1(\varphi) \quad \mathcal{F}_2 = \inf_{\substack{\varphi \in [0, 2\pi] \\ Z < -K}} G(\varphi, Z) \quad (\text{A3.4})$$

L'objectif de cette annexe est de simplifier le calcul numérique du réel  $\lambda_s(\beta)$  tel qu'il est défini en (A3.3). En posant  $F_2(\varphi) = \inf_{Z < -K} G(\varphi, Z)$ , il suffit de remarquer que  $\mathcal{F}_2 = \inf_{\varphi \in [0, 2\pi]} F_2(\varphi)$ . La simplification recherchée consiste donc à déterminer analytiquement la quantité  $F_2(\varphi)$ . Pour cela, on observe d'abord que l'on peut écrire pour  $Z < 0$ :

$$G(\varphi, Z) = \frac{-Z}{\sqrt{A(\varphi)^2 + (B(\varphi)Z + C(\varphi))^2}} \quad (\text{A3.5})$$

où l'on a posé:

$$\begin{aligned} A(\varphi) &= \sin\varphi + 2\operatorname{tg}\beta\sin 2\varphi \\ B(\varphi) &= \frac{1}{2}\cos\varphi + 2\operatorname{tg}\beta\cos 2\varphi \\ C(\varphi) &= \frac{1}{2K}[\cos\varphi(1+\frac{K^2}{2}) + \operatorname{tg}\beta\cos 2\varphi(1+2K^2)] \end{aligned} \quad (\text{A3.6})$$

L'extremum dans  $\mathbb{R}$  de  $G(\varphi, \cdot)$  est atteint pour  $Z=Z_0$  défini par:

$$Z_0 = -\frac{A^2 + C^2}{BC} \quad (\text{A3.7})$$

Pour le calcul de  $F_2(\varphi)$ , il faut donc distinguer deux cas:

$$\text{si } Z_0(\varphi) < -K \text{ alors } F_2(\varphi) = \inf(G(\varphi, Z_0(\varphi)); G(\varphi, -K); \lim_{Z \rightarrow -\infty} G(\varphi, Z)) \quad (\text{A3.8})$$

$$\text{si } Z_0(\varphi) > -K \text{ alors } F_2(\varphi) = \inf(G(\varphi, -K); \lim_{Z \rightarrow -\infty} G(\varphi, Z))$$

Le calcul de  $\lambda_s(\beta)$  se ramène alors à minimiser les fonctions  $F_1$  et  $F_2$  par rapport à  $\varphi$ .

#### b. Calcul de $\lambda_c$

On recherche, pour une valeur donnée de  $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , la quantité définie à l'équation (109). Il s'agit de déterminer les extrema de la fonction :

$$g_\beta(\varphi) = \sin\varphi + 2\operatorname{tg}\beta\sin 2\varphi \quad (\text{A3.8})$$

Il est facile de voir que ces extrema sont atteints lorsque  $\cos\varphi = X_\epsilon$  ( $\epsilon = \pm 1$ ) où  $X_\epsilon$  est défini par:

$$X_\epsilon = \frac{-1 + \epsilon \sqrt{1 + 128 \operatorname{tg}^2 \beta}}{16 \operatorname{tg} \beta} \quad (\text{A3.9})$$

Pour les valeurs considérées de  $\beta$ , on observe que  $X_\pm \in [0, 1]$ . Pour situer  $|X_-|$  par rapport à 1, il faut distinguer selon les valeurs de  $\beta$ :

pour  $\beta \in [0, \arctg \frac{1}{4}]$  :  $|X_-| > 1$  (A3.10)

pour  $\beta \in [\arctg \frac{1}{4}, \frac{\pi}{2}]$  :  $|X_-| < 1$

En remarquant que:

$$|g_\beta(\varphi)| = |1 + 4 \operatorname{tg} \beta \cdot \cos \varphi| \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} \quad (\text{A3.11})$$

et en posant:

$$G_\epsilon = |1 + 4 \operatorname{tg} \beta \cdot X_\epsilon| \cdot \sqrt{1 - X_\epsilon^2} \quad (\text{A3.12})$$

il vient:

$$\text{Si } \beta \in [0, \arctg \frac{1}{4}] : \sup_{\varphi \in [0, 2\pi]} |g_\beta(\varphi)| = G_+ \quad (\text{A3.13})$$

$$\text{Si } \beta \in [\arctg \frac{1}{4}, \frac{\pi}{2}] : \sup_{\varphi \in [0, 2\pi]} |g_\beta(\varphi)| = \sup(G_-; G_+)$$

ANNEXE 4. Orientation de la direction principale mineure des champs de  $H_0 \cap L^{-1}(\lambda)$  au voisinage du fond marin.

Soit  $\underline{\underline{\sigma}} \in H_0 \cap L^{-1}(\lambda)$ . L'objectif de cette annexe est de déterminer la valeur de la limite quand  $y \rightarrow 0$  de l'angle  $\delta$  formé par la verticale avec la direction principale mineure du tenseur  $\underline{\underline{\sigma}}(\alpha, y)$ . On adopte les notations suivantes :

$$a = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y}(\alpha, 0) ; b = p'_h(\alpha) ; t = a/2b \quad (A4.1)$$

A partir du développement limité des composantes de  $\underline{\underline{\sigma}}$  donné en (115), il est facile de voir que

$$\underline{\underline{\sigma}}(\alpha, y) = \lambda \left\{ -p_h(\alpha) \underline{\underline{I}}_2 + y \underline{\underline{\sigma}}^*(\alpha, y) \right\} \quad (A4.2)$$

où le tenseur  $\underline{\underline{\sigma}}^*$  est défini par sa matrice  $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}^*$  dans la base  $(\underline{\underline{i}}, \underline{\underline{j}})$

$$\hat{\underline{\underline{\sigma}}}^* = \begin{bmatrix} a & b \\ b & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \quad (A4.3)$$

En notant  $v$  la contrainte principale majeure de  $\underline{\underline{\sigma}}^*$ , et  $\sigma^-$  la contrainte principale mineure de  $\underline{\underline{\sigma}}$ , on observe que :

$$\frac{\sigma^-}{\lambda} = -p_h(\alpha) + y \cdot v \quad (A4.4)$$

L'équation de la direction principale mineure de  $\underline{\underline{\sigma}}$  qui coïncide avec la direction principale majeure de  $\underline{\underline{\sigma}}^*$  est donnée par :

$$b \cdot x + \frac{\varepsilon_{xy} x + \varepsilon_{yy} y}{\lambda} = v \cdot y \quad (A4.5)$$

En désignant par  $\beta = \text{Arctg}(\frac{y}{x})$ , l'inclinaison de cette droite sur l'horizontale, il vient :

$$\text{tg} \beta (v - \frac{\varepsilon_{yy}}{\lambda}) = b + \frac{\varepsilon_{xy}}{\lambda} \quad (A4.6)$$

et par suite :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \text{tg} \delta = \frac{-1}{\lim_{y \rightarrow 0} \text{tg} \beta} = -\frac{1}{b} \lim_{y \rightarrow 0} v \quad (A4.7)$$

Enfin, il est facile de voir que :

$$\lim_{y \rightarrow 0} v = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4b^2}) \quad (\text{A4.8})$$

Soit finalement :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \operatorname{tg} \delta = -(t + \varepsilon \sqrt{1+t^2}) \text{ avec } \begin{cases} \varepsilon = +1 \text{ si } b > 0 \\ \varepsilon = -1 \text{ si } b < 0 \end{cases} \quad (\text{A4.9})$$

## ANNEXE 5. Un majorant de $F'_h(x)$

Soit  $M(x,0)$  un point situé à la surface du fond marin et  $\underline{\sigma}$ , un champ de contraintes s.a. avec  $\lambda p_h(\cdot)$ . On suppose qu'il existe un réel  $\varepsilon > 0$  tel que  $\underline{\sigma}$  soit compatible avec les capacités de résistance du matériau anisotrope dans le demi-disque  $\Omega_\varepsilon$  de centre  $M$  et de rayon  $\varepsilon$ . On désigne par  $I'_\varepsilon$  le domaine dense dans  $I_\varepsilon = ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$  où  $p_h$  et  $\underline{\sigma}$  sont dérivables. Enfin, on pose pour  $\alpha \in I'_\varepsilon$  :

$$t = \frac{1}{2\lambda p'_h(\alpha)} \cdot \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y}(\alpha, 0) \quad \text{et} \quad \delta_t^s = \arctg(t + s\sqrt{1+t^2}) \quad (\text{A5.1})$$

L'équation (119) établit que :

$$(\forall \alpha \in I'_\varepsilon) \quad |\lambda| \cdot |p'_h(\alpha)| \leq \frac{\gamma_c(\delta_t^s)}{\sqrt{1+t^2}} \quad (\text{A5.2})$$

L'objectif de cette Annexe est de démontrer qu'il existe un réel  $T$  pour lequel :

$$|\lambda| \cdot F'_h(x) \leq \frac{\gamma_c(\delta_T^+)}{\sqrt{1+T^2}} \quad (\text{A5.3})$$

Si  $x \in I'_\varepsilon$ , ce résultat est immédiat puisque le réel  $T$  défini par  $\frac{1}{2\lambda p'_h(x)} \cdot \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y}(x, 0)$  si  $s = p'_h(x) > 0$  (ou l'opposé de cette quantité si  $s < 0$ ) répond à la question. On suppose maintenant que  $x \notin I'_\varepsilon$ . On note respectivement  $p'_h(x^+)$  et  $p'_h(x^-)$  les dérivées à droite et à gauche de  $p_h$  en  $x$ , définies par :

$$p'_h(x^+) = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow x \\ \alpha > x}} p'_h(\alpha) \quad p'_h(x^-) = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow x \\ \alpha < x}} p'_h(\alpha) \quad (\text{A5.4})$$

La fonction  $\gamma_c$  étant bornée, si l'une ou l'autre de ces limites est infinie, l'équation (A5.2) montre qu'une valeur non nulle de  $\lambda$  ne peut être potentiellement supportable. On a donc  $\lambda = 0$  et tout réel  $T$  répond à la question dans (A5.3)



On suppose donc que les limites définies par (A5.4) sont finies et, par exemple, que  $F'_h(x) = |p'_h(x^+)|$ . Soit  $(\alpha_n)$  une suite dans  $I'_\varepsilon$  qui converge vers  $x$ , et  $(t_n)$  et  $(s_n)$  les suites associées à  $(\alpha_n)$  par (A5.1). Si la suite  $(t_n)$  n'est pas bornée, comme  $\gamma_c$  est bornée et que  $p'_h$  est également bornée au voisinage de  $x$ , il en résulte que  $\lambda=0$ . De nouveau, tout réel  $T$  répond à la question dans (A5.3). On suppose donc que la suite  $|t_n|$  est bornée. Alors on peut en extraire une sous-suite  $(t'_p) = (t_{n_p})$  convergente et l'on note  $T$  sa limite. Le signe de la suite  $(s_{n_p})$  étant constant au-delà d'un certain rang, il n'est pas restrictif de le supposer positif. On a

$$(\forall p \in \mathbb{N}) \quad |\lambda| \cdot |p'_h(\alpha_{n_p})| \leq \frac{\gamma_c(\delta_{t'_p}^+)}{\sqrt{1+t'^2_p}} \quad (\text{A5.5})$$

Lorsque  $p \rightarrow \infty$ , on obtient exactement la majoration (A5.3) recherchée, ce qui achève de démontrer le résultat annoncé.

## ANNEXE 6. Minima de $\gamma_c(.)$ et $f_t(.)$ .

### a. Détermination du minimum de $\gamma_c(.)$

On recherche le minimum du gradient de cohésion  $\gamma_c(.)$ . Posant  $X = \sin^2 \delta$ , il s'agit de déterminer le minimum sur  $[0,1]$  du polynôme  $P(.)$  défini par :

$$P(X) = (1-aX)(1-4bX(1-X)) \quad (A6.1)$$

La valeur minimale de  $P(.)$  sur  $[0,1]$  est atteinte en  $X=0$  ( $P(0)=1$ ), ou en  $X=1$  ( $P(1)=1-a$ ) ou encore en un zéro réel situé entre 0 et 1 du polynôme  $P'(.)$  :

$$P'(X) = 12abX^2 - 8b(1+a)X + a + 4b \quad (A6.2)$$

Les zéros éventuellement complexes de  $P'(.)$  sont :

$$x^{\pm} = \frac{2b(1+a) \pm \sqrt{4b^2(1+a)^2 - 3ab(a+4b)}}{6ab} \quad (A6.3)$$

En résumé :

$$\text{-si } x^{\pm} \in [0,1], \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \gamma_c(\theta) = \inf(1, 1-a, P(x^{\pm})) \quad (A6.4)$$

$$\text{-si } x^{\pm} \notin [0,1], \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \gamma_c(\theta) = \inf(1, 1-a)$$

### b. Détermination du minimum de $f_t(.)$

On pose  $g(t) = \inf_{Z \in \mathbb{R}} f_t(Z)$ , la fonction  $f_t(.)$  étant définie par :

$$f_t(Z) = \frac{|Z|}{A} \cdot \left\{ 1 + \frac{4t^2 A^2}{(1 + A^2/2 + AZ)^2} \right\}^{1/2} \quad (A6.5)$$

Avec les notations  $a = 4t^2$  et  $b = \frac{1}{A} + \frac{A}{2}$ , le calcul montre que la dérivée de  $f_t(.)$  s'annule pour  $Z_0 = -b - (ab)^{1/3}$ . Les variations de la fonction  $f_t(.)$

sont illustrées à la figure 1. Pour le calcul de  $g(\cdot)$ , deux cas se présentent:

$$\begin{aligned} \text{-si } Z_0 < -A : g(t) &= \min(f_t(Z_0); f_t(-A)) \\ \text{-si } Z_0 > -A : g(t) &= f_t(-A) \end{aligned} \quad (\text{A6.6})$$

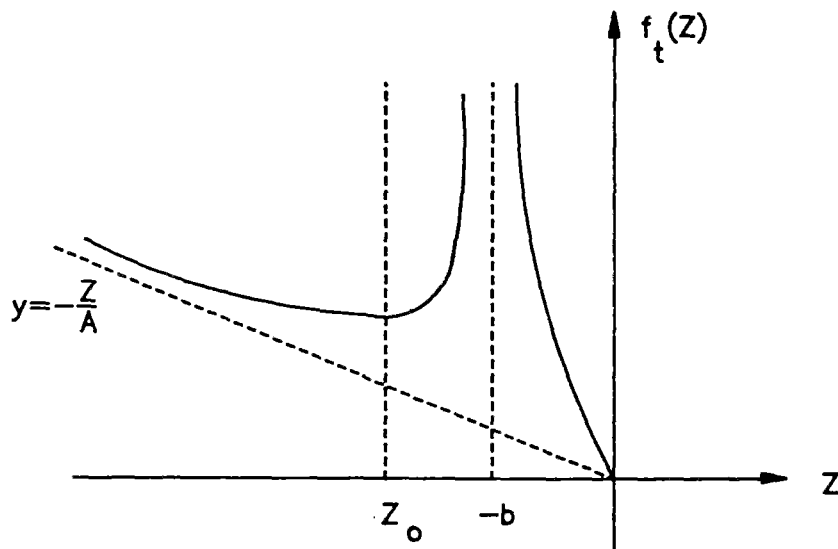


figure 1. Variation de  $f_t(\cdot)$

**ANNEXE 7. Orientation des directions principales pour un tenseur de contraintes vérifiant  $\sigma_{11}=0$**

On considère un endomorphisme  $\mathcal{M}$  de  $\mathbb{R}^2$  dont la matrice est  $M$  :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (\text{A7.1})$$

où  $a$  et  $b$  sont deux réels donnés. Les valeurs propres de  $M$  sont :

$$\lambda_{\mathcal{M}}^{\pm} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} \quad (\text{A7.2})$$

On recherche l'angle  $\delta$  entre la direction principale mineure de  $\mathcal{M}$  (associée à  $\lambda_{\mathcal{M}}^{-}$ ) et la verticale. L'équation de cette droite est :

$$b \cdot y = \lambda_{\mathcal{M}}^{-} \cdot x \quad (\text{A7.3})$$

Il en résulte immédiatement que :

$$\text{tg } \delta = -b/\lambda_{\mathcal{M}}^{-} = \frac{-2b}{a - \sqrt{a^2 + 4b^2}} = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2b} \quad (\text{A7.4})$$

En posant  $t = a/2b$ , il vient encore :

$$\text{tg } \delta = (t + \varepsilon \sqrt{1+t^2}) \text{ avec } \begin{cases} \varepsilon = +1 \text{ si } b > 0 \\ \varepsilon = -1 \text{ si } b < 0 \end{cases} \quad (\text{A7.5})$$

Pour les applications du paragraphe 3,  $\delta$  n'intervient que par la valeur de  $\gamma_c(\delta)$ . Celle-ci est entièrement déterminée par la donnée de  $|\text{tg } \delta|$ . C'est la raison pour laquelle on prendra systématiquement :

$$\delta = \delta_t^{\varepsilon} = \arctg(t + \varepsilon \sqrt{1+t^2}) \quad (\text{A7.6})$$

## ANNEXE 8. Quelques indications qualitatives pour le choix de A

Un minorant de  $L^+ = kp_0^+ / \gamma_c(\frac{\pi}{4})$  a été fourni à l'équation (136). Il s'agit de maximiser cette quantité par un choix judicieux du paramètre A. On souhaite en particulier améliorer les minoration fournies par l'approche statique élastique pour les valeurs de  $(K_1, K_2)$  vérifiant :

$$\inf(K_1, K_2) \geq 1 \quad \text{ou} \quad K_1 \leq \inf(1, K_2) \quad (\text{A8.1})$$

Une détermination analytique rigoureuse du choix optimal de A n'est pas praticable. Cependant, les considérations ci-après sont utiles pour définir la fourchette dans laquelle il faut rechercher A. On pose

$$X_1(t) = \frac{\gamma_c(\delta_t)}{\gamma_c(\frac{\pi}{4})} \cdot \left\{ \frac{1+(4t/A)^2}{1+t^2} \right\}^{\frac{1}{2}} ; \quad X_2(t) = \frac{\gamma_c(\delta_t)}{\gamma_c(\frac{\pi}{4})} \cdot \frac{g(t)}{\sqrt{1+t^2}} \quad (\text{A8.2})$$

Les seules valeurs de  $X_1$  qui soient accessibles "à la main" correspondent à  $t=0$  ou  $t=\pm\infty$ . On observe d'abord que  $X_1(0)=X_2(0)=1$ . Le choix de A n'intervient donc pas sur les valeurs prises par les fonctions  $X_1$  au voisinage de 0. En revanche, on va voir qu'il conditionne la valeur des asymptotes de ces fonctions lorsque  $t \rightarrow \pm\infty$ . Pour le calcul de ces quantités, on remarque d'abord que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \delta_t = \frac{\pi}{2}$  et  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \delta_t = 0$ . Par ailleurs, la définition de  $Z_0$  montre que  $Z_0 < -A$  pour les grandes valeurs de  $|t|$ . L'expression de  $g(t)$  est donc donnée par (A8.2). Les limites suivantes résultent de ces observations :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X_1 = \frac{K_1}{K_2} \cdot \frac{4}{A} \quad (\text{A8.3})$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} X_1 = \frac{1}{K_2} \cdot \frac{4}{A} \quad (\text{A8.4})$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X_2 = \frac{K_1}{K_2} \cdot \inf \left( \frac{2A}{1-A^2/2}; \frac{2}{A} \right) \quad (\text{A8.5})$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} X_2 = \frac{1}{K_2} \cdot \inf \left( \frac{2A}{1-A^2/2}; \frac{2}{A} \right) \quad (\text{A8.6})$$

La valeur maximale de la quantité  $\inf(\frac{2A}{1-A^2/2}; \frac{2}{A})$  est atteinte pour  $A=\sqrt{2/3}$  et vaut  $\sqrt{6}$ . Pour les valeurs élevées de  $K_2$  ou de  $K_2/K_1$ , il est raisonnable, au vu de (A8.5) et (A8.6), de penser que les fonctions  $X_1$  atteignent leur maximum respectivement lorsque  $t \rightarrow \infty$  et  $t \rightarrow \infty$ . En choisissant  $A \approx \sqrt{2/3}$ , on peut alors espérer une minoration de  $L^+$  du type :

$$L^+ \geq \inf \left[ \sqrt{6} \cdot \frac{K_1}{K_2} ; 1 \right] \quad \text{si } \frac{K_1}{K_2} < 1 \quad (\text{A8.7})$$

$$L^+ \geq \inf \left[ \sqrt{6}/K_2 ; 1 \right] \quad \text{si } K_2 > 1 \quad (\text{A8.8})$$

Il est possible de résumer (A8.7) et (A8.8) par une minoration unique :

$$L^+ \geq \inf \left[ \sqrt{6} \cdot \frac{K_1}{K_2} ; \sqrt{6}/K_2 ; 1 \right] \quad (\text{A8.9})$$

Le raisonnement précédent ne constitue évidemment pas une démonstration de (A8.9). A ce stade, il s'agit simplement d'une présomption et d'un guide pour une résolution numérique précise du problème. Celle-ci, qui a été développée à partir des réflexions qualitatives présentées dans cette annexe, a confirmé la validité de la minoration (A8.9). Les résultats en sont présentés au paragraphe 3.b.3 et ils montrent que (A8.9) est valable pour toutes les valeurs des  $K_1$ .

## ANNEXE 9. Mécanismes d'instabilité locaux

Cette annexe présente 2 familles de mécanisme ayant été envisagés pour approcher par l'extérieur la borne  $p_0^+$  de l'amplitude de la houle linéaire dans le cas du matériau cohérent homogène isotrope. Ils fournissent des résultats moins bons que la majoration (172).

### a. Mécanisme n°1

On définit une famille de champs de vitesse à 3 paramètres  $\alpha, \beta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  et  $h > 0$  (voir figure 1). O étant l'origine de l'axe des x, les blocs triangulaires OAA', OA'B', OBB' sont en translation parallèle respectivement aux segments AA', A'B' et BB'. La vitesse est nulle dans le reste du massif. U désignant l'amplitude de la vitesse du bloc OAA', les amplitudes des vitesses V de OA'B' et W de OBB' sont déterminées par la nécessité que les discontinuités de vitesse entre blocs soient tangentielles. L'hodographe fournit alors :

$$\begin{aligned} V &= U \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha} \\ W &= U \end{aligned} \quad (A9.1)$$

La discontinuité Z entre les blocs OAA' et OB'A' est égale à celle entre les blocs OBB' et OB'A'. Elle vaut :

$$Z = U \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \quad (A9.2)$$

d désignant la distance de O à la droite A'B', il est facile de voir que la puissance dissipable vaut :

$$P(\underline{V}) = 2CdU \left\{ \frac{1}{\cos\beta} + \frac{\cos\beta}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin\alpha \cdot \sin\alpha+\beta}{\cos^2\alpha} \right\} \quad (A9.3)$$

La puissance  $\mathcal{P}_{\text{ext}}$  de la pression  $p_0 \sin kx$  dans le champ de vitesse V vaut :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = U \cos\beta \left\{ \int_0^h \sin kx \, dx - \int_{-h}^0 \sin kx \, dx \right\} \quad (A9.4)$$

En s'appuyant sur (3) et (4), le théorème cinématique donne :

$$(\forall \alpha, \beta \in ]0, \frac{\pi}{2}[) (\forall h > 0) \quad p_o^+ \leq C \cdot \frac{kh}{1 - \cosh k} \cdot \frac{1 + 2A^2 + B^2 + AB}{A+B} \quad (A9.5)$$

où l'on a posé  $A = \tan \alpha$  et  $B = \tan \beta$ . La fraction rationnelle en A et B de (5) est minimale pour  $A = 1/\sqrt{7}$  et  $B = 3/\sqrt{7}$ . Elle vaut alors  $\sqrt{7}$ . Par ailleurs, on montre que  $\inf_{x>0} \frac{x}{1 - \cos x} = 1,38$ . La meilleure majoration obtenue au moyen de cette famille de mécanismes est donc :

$$p_o^+ \leq 3,65 C \quad (A9.6)$$

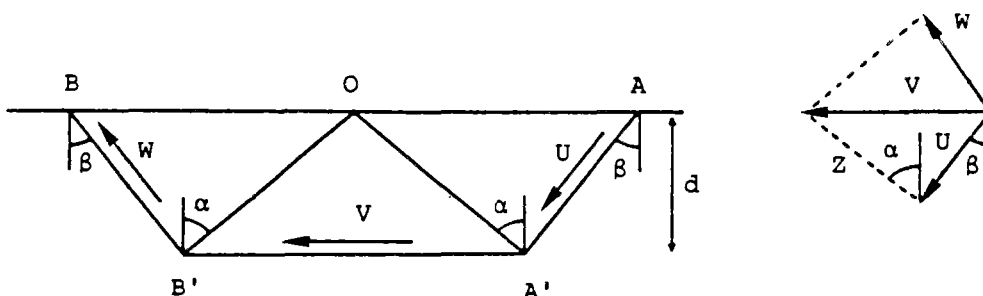


figure 1. Mécanisme n°1

#### b. Mécanisme n°2

On définit une famille de champs de vitesse à 2 paramètres  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  et  $h > 0$  (voir figure 2). Le bloc triangulaire OAA' (resp. OBB') est en translation à la vitesse U (resp. V) parallèlement à AA' (resp. BB') et l'arc A'B', la vitesse est orthoradiale d'amplitude constante W :

$$\underline{V}(M) = -W \underline{e}_\theta \quad (A9.7)$$

La vitesse est nulle dans le reste du massif. La continuité de la composante normale de la vitesse au passage des segments OA' et OB' impose que  $U=V=W$ . La puissance dissipable par le matériau dans le champ de vitesses V provient de la discontinuité de vitesses sur les



segments AA', BB' et A'B', ainsi que des déformations dans le secteur angulaire OA'B'. Il vient :

$$\int_{OA'B'} \pi(\underline{d}) dS = 2CUh. \alpha \sin \alpha \quad (A9.8)$$

$$\int_{A'A} \pi(\underline{n}, [\underline{V}]) dl = \int_{A'A} \pi(\underline{n}, [\underline{V}]) dl = CUh. \alpha \sin \alpha \quad (A9.9)$$

$$\int_{A'B'} \pi(\underline{n}, [\underline{V}]) dl = 2CUh. \alpha \sin \alpha \quad (A9.10)$$

tous calculs faits :

$$P(\underline{V}) = 2CUh(2\alpha \sin \alpha + \cos \alpha) \quad (A9.11)$$

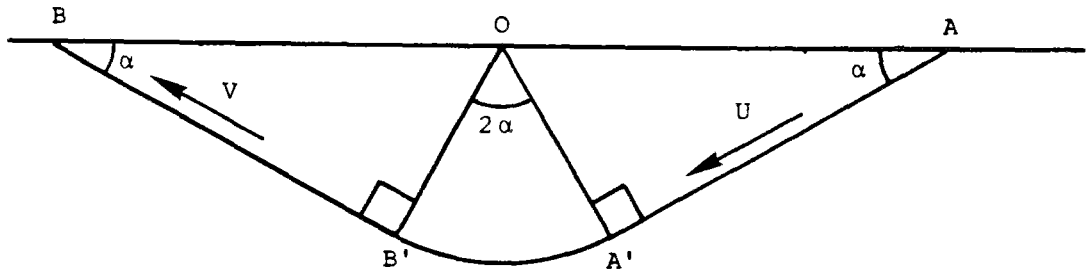


figure 2. Mécanisme n°2

La puissance  $\mathcal{P}_{\text{ext}}$  de la pression  $p_o \sin kx$  dans le champ de vitesses  $\underline{V}$  est donnée par :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = p_o U \sin \alpha \left\{ \int_0^h \sin kx \, dx - \int_{-h}^0 \sin kx \, dx \right\} \quad (A9.12)$$

soit :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = 2p_o U \sin \alpha. \frac{1 - \cosh k}{k} \quad (A9.13)$$

En s'appuyant sur (11) et (13), le théorème cinématique donne :

$$(\forall \alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[) (\forall h > 0) \quad p_o^+ \leq C \cdot \frac{kh}{1 - \cos kh} \cdot (2\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}) \quad (\text{A9.14})$$

L'angle  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  réalisant le minimum de  $2\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$  n'est autre que  $\frac{\pi}{4}$ . En se rappelant que  $\inf_{x>0} (x/1 - \cos x) = 1,38$ , on obtient la meilleure majoration de  $p_o^+$  accessible par cette famille :

$$p_o^+ \leq 3,55 \, C \quad (\text{A9.15})$$

## ANNEXE 10. Expression analytique de $\varphi(f)$

On recherche une expression analytique de la solution  $\varphi(f)=G$  dans  $\mathbb{R}^-$  de l'équation différentielle (189) en fonction de la donnée  $f(\cdot)$ . A la classique méthode de la variation de la constante on préfère ici un procédé basé sur l'emploi d'une solution élémentaire de l'opérateur  $P(D)=D^2+D^0$ . On désigne par  $\mathcal{Y}$  la fonction-échelon définie par:

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}(x) &= 1 \text{ si } x < 0 \\ \mathcal{Y}(x) &= 0 \text{ si } x > 0\end{aligned}\tag{A10.1}$$

En considérant une fonction  $g$  de Classe  $C^2$  quelconque, il est facile de voir que:

$$\begin{aligned}D(g\mathcal{Y}) &= g'\mathcal{Y} - g(0)\delta \\ D^2(g\mathcal{Y}) &= g''\mathcal{Y} - g'(0)\delta - g(0)\delta'\end{aligned}\tag{A10.2}$$

En utilisant (189) dans (A10.2), il vient:

$$P(D)(G\mathcal{Y}) = (1+f)\mathcal{Y}\tag{A10.3}$$

De plus, si l'on désigne par  $\varphi_0$  la solution du problème différentiel :

$$\begin{aligned}\varphi_0'' + \varphi_0 &= 0 \\ \varphi_0(0) &= 0 \quad \varphi_0'(0) = -1\end{aligned}\tag{A10.4}$$

on vérifie immédiatement à partir de (A10.2) que  $E = \varphi_0\mathcal{Y}$  constitue une solution élémentaire de l'opérateur  $P(D)$ . Il en résulte que:

$$E * P(D)(G\mathcal{Y}) = P(D)(E) * G\mathcal{Y} = G\mathcal{Y}\tag{A10.5}$$

En comparant (A10.3) et (A10.5), il vient :

$$G\mathcal{Y} = E * (1+f)\mathcal{Y}\tag{A10.6}$$

On vérifie immédiatement que  $\varphi_0(x) = -\sin(x)$ . En reportant ce résultat dans (A10.6), on trouve finalement:

$$\varphi_0(y) = \int_0^y \sin(y-t)(1+f(t))dt\tag{A10.7}$$

## CHAPITRE IV - STABILITE D'UN MASSIF DE SOL GRANULAIRE

### 1 - INTRODUCTION

Les développements présentés au chapitre III reposent sur l'emploi du critère de rupture de Tresca. La pertinence de cette approche est toutefois limitée aux sols fins. Pour l'étude de la stabilité d'un massif sous-marin constitué d'un sable, la modélisation des capacités de résistance du matériau par le critère de Mohr-Coulomb, calculé sur le tenseur des contraintes *effectives* est plus satisfaisante. L'analyse de ce nouveau problème doit donc explicitement prendre en compte le caractère biphasique du sol.

Qualitativement, la pression qu'exerce la houle sur la face supérieure du massif sous-marin est équilibrée par un champ de contraintes et une pression interstitielle cycliques, comme cela a été montré au chapitre II dans le cas particulier d'un squelette élastique. En raison de la contractance des sables, c'est-à-dire de leur tendance à se densifier lorsqu'ils sont soumis à un état de contraintes déviatoriques cycliques, un tel chargement provoque en général l'accumulation de surpressions interstitielles dans le massif. Le régime hydraulique dans ce dernier est donc marqué par un écoulement de l'eau interstitielle vers les zones drainantes, c'est-à-dire le plus souvent vers l'interface sol/mer.

Dans une analyse de la question de la stabilité du massif en *contraintes effectives*, ce sont les forces exercées par cet écoulement sur le squelette qui caractérisent les efforts. Ce mode de chargement du massif est donc distinct de celui qui a été introduit au chapitre III, dans le cadre de l'analyse en contraintes totales. C'est la raison pour laquelle l'étude de la stabilité d'un massif de sable soumis à l'action de la houle ne se limite pas, par rapport aux développements du Chapitre III, à un simple changement de critère de

rupture.

D'ores et déjà, l'existence d'une imbrication entre le chargement, caractérisé par les forces d'écoulement agissant sur le squelette, et la contractance, qui est un trait du comportement évidemment non contenu dans le critère de rupture, semble mettre en cause la faisabilité même du calcul de stabilité.

Ce chapitre propose donc une réflexion sur l'emploi du Calcul à la Rupture en contraintes effectives. Elle débouche sur une méthode *approchée* pour l'analyse de la stabilité des massifs de sables soumis à l'action de la houle. Mais puisque la nécessité de connaître davantage du matériau que son seul critère de rupture vient d'être entrevue, il convient en premier lieu d'examiner son comportement sous sollicitation cyclique.

## 2 - ELEMENTS SUR LE COMPORTEMENT DES SABLES SOUS SOLlicitATION CYCLIQUE

Le couplage "comportement-chargement" évoqué ci-dessus intervient au niveau du calcul des forces d'écoulement exercées par le fluide sur le squelette. Il convient donc d'étudier le mécanisme de génération de surpressions interstitielles observé lors d'un chargement déviatorique cyclique. Plus précisément, ce paragraphe va se concentrer sur le phénomène de liquéfaction qui est une des conséquences majeures de la génération de surpressions interstitielles. Parmi les nombreuses informations disponibles sur ce sujet, on se bornera à donner les éléments qui sont nécessaires pour la compréhension des développements ultérieurs. Pour une documentation plus détaillée sur la liquéfaction des sables, on pourra se reporter aux synthèses présentées par Finn (1981), Ishihara (1982), Pecker (1984) ou Schlosser et al. (1987).

### 2.a observation du phénomène de liquéfaction en condition non drainée

Il convient pour mémoire de rappeler qu'un chargement cyclique purement isotrope conduit en général à un comportement adapté en peu de cycles, indépendamment des conditions de drainage (Luong, 1980; Schlosser et al. 1987). En conséquence, vis-à-vis du propos de ce travail, un tel chargement peut être qualifié de "bénin", au sens où il ne saurait conduire à des forces d'écoulement susceptibles de menacer la stabilité du massif sollicité. Il s'agit donc de se concentrer sur les effets d'un chargement déviatorique cyclique. Le phénomène de liquéfaction qui peut en résulter va être présenté sur un exemple.

La figure 1 présente un essai typique de cisaillement cyclique effectué à l'appareil triaxial sur une éprouvette de sable moyennement dense non drainée (Pecker, 1984). L'état de contraintes effectives initial est  $\underline{\sigma}'_0 = -\sigma'_0 \underline{I}$  avec  $\sigma'_0 = 200 \text{ kPa}$ . Le trajet de contraintes totales est obtenu en maintenant constante la pression de confinement et en asservissant le déviateur  $q = \sigma_3 - \sigma_1$  à suivre en fonction du temps un signal triangulaire.

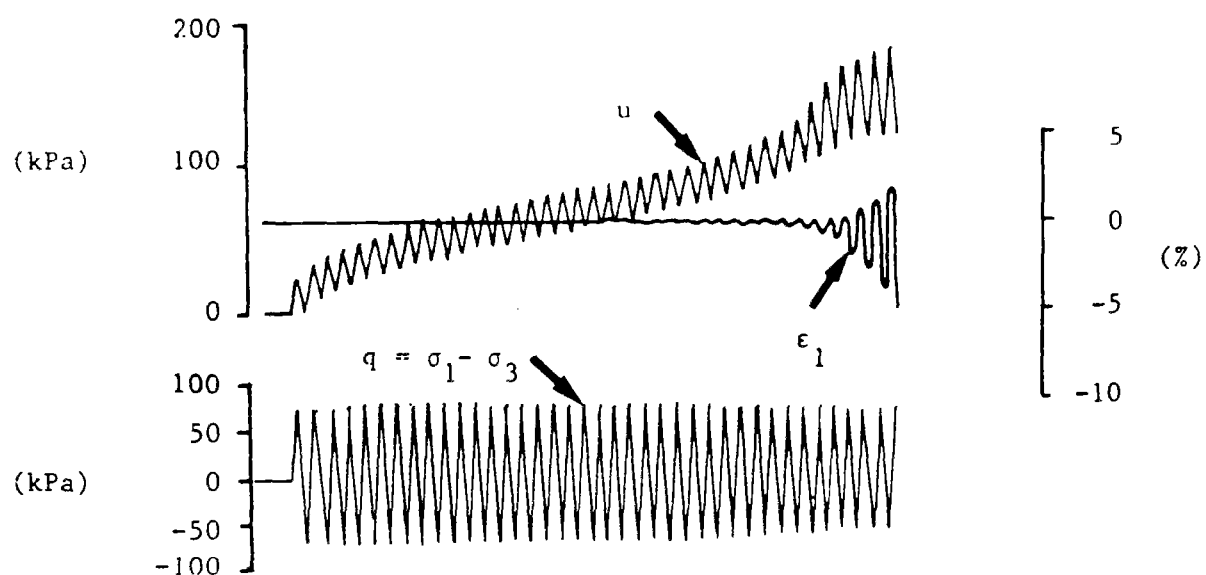


Figure 1. Enregistrement d'un essai de liquéfaction  
(d'après Pecker, 1984)

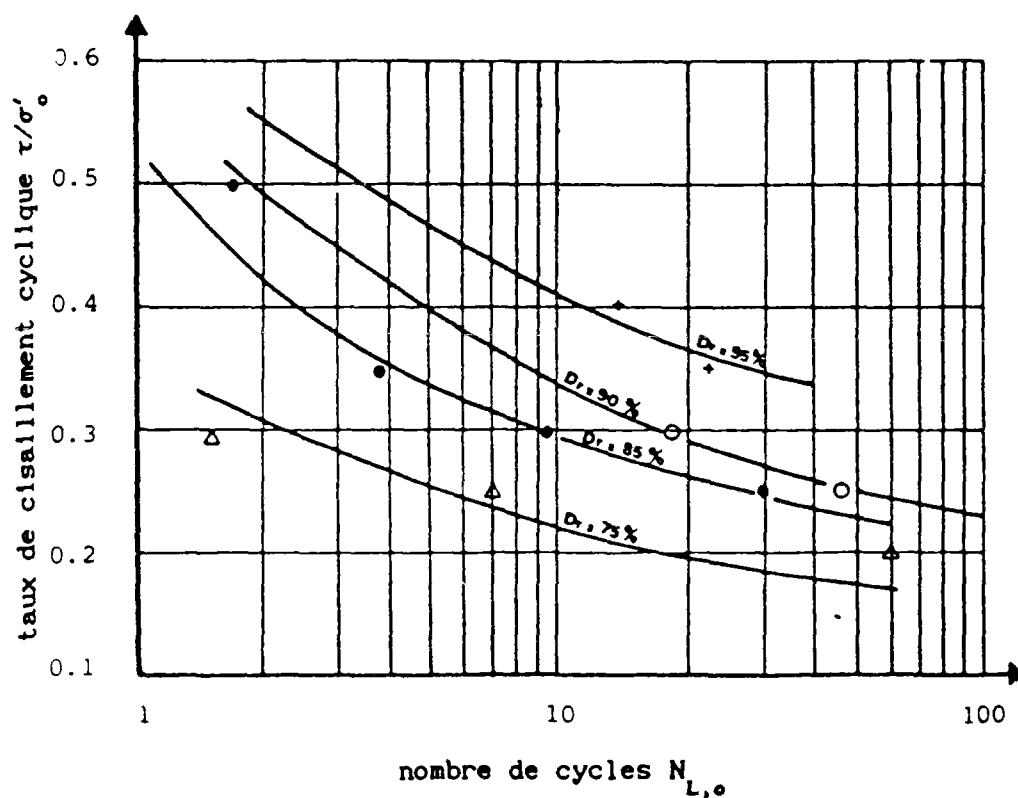


Figure 2. Courbes de résistance au cisaillement cyclique (d'après Pecker, 1984)

Les résultats de cet essai sont constitués par l'enregistrement des déformations axiales  $\varepsilon_1$  et par celui de la surpression interstitielle  $u$ . On observe que les déformations axiales restent très limitées aussi longtemps que la pression interstitielle demeure inférieure à  $0.6\sigma'_0$  environ. Puis, au-delà de ce seuil, l'amplitude de leur variation croît jusqu'à prendre des proportions conduisant à la destruction de l'échantillon. On explique classiquement ce phénomène par la diminution progressive de la contrainte effective moyenne qui accompagne le phénomène de génération de surpressions interstitielles. En particulier, lorsque la contrainte effective moyenne s'annule, l'éprouvette perd toute résistance au cisaillement puisqu'elle est constituée d'un matériau purement frottant, et s'écoule comme un fluide. On dit qu'il y a liquéfaction.

D'une manière plus générale, on considère maintenant une histoire périodique de contraintes notée  $\underline{\sigma}(t)$ , que l'on applique à une éprouvette non drainée au laboratoire. On quantifie classiquement l'évolution de la pression interstitielle  $u$  par une fonction  $\psi(N)$  donnant la valeur de  $u$  au terme du cycle  $n^{\circ}N$ . On observe que la pression interstitielle générée est proportionnelle à la contrainte effective moyenne initiale  $\sigma'_0 = -\frac{1}{3}\text{tr}(\underline{\sigma}'_0)$ . Notant  $N_{L,0}$  le nombre de cycles de la sollicitation qui provoque la liquéfaction de l'échantillon *pris dans son état initial*, on introduit classiquement une fonction  $f$  définie sur  $[0,1]$  par :

$$\psi(N) = \sigma'_0 f(N/N_{L,0}) \quad (1)$$

Elle vérifie par construction les relations

$$f(0)=0 ; f(1)=1 \quad (2)$$

Certains auteurs ont cherché à préciser la forme de la fonction  $f$  (Seed et al., 1976). Cependant, selon Smits et al. (1979), la simplification qui consiste à poser  $f(x)=x$  est en bon accord avec les observations expérimentales. Cette schématisation sera adoptée pour la suite. On écrira donc très simplement



$$\psi(N) = \sigma'_o N / N_{L,o} \quad (3a)$$

Ceci revient à admettre que le taux  $\frac{d\psi}{dN}$  de génération de pression interstitielle en condition non drainée est constant. On a donc

$$\frac{d\psi}{dN} = \sigma'_o / N_{L,o} = (\sigma'_o - \psi(N)) / (N_{L,o} - N) \quad (3b)$$

On remarquera que  $\sigma'_o - \psi(N)$  représente la contrainte effective moyenne après  $N$  cycles et que  $N_{L,o} - N$  n'est autre que le nombre de cycles liquéfiant l'échantillon à partir de l'état atteint après  $N$  cycles. Il reste à relier  $N_{L,o}$  aux caractéristiques du matériau et de la sollicitation. La mise en évidence de l'influence décisive de la densité d'un sable sur la valeur de  $N_{L,o}$  est ancienne. Elle est caractérisée usuellement par l'indice des vides  $e_o$  qui reste constant au cours d'un essai non drainé homogène. On désigne par  $\tau$  l'amplitude des variations de la quantité  $(\frac{1}{2} \underline{s}_{ij} \underline{s}_{ij})^{1/2}$ , où  $\underline{s}$  désigne la partie déviatorique du tenseur  $\underline{\sigma}$ . On montre expérimentalement que  $N_{L,o}$  dépend de  $\tau$  et  $\sigma'_o$ , à  $e_o$  donné, par l'intermédiaire du rapport de ces contraintes. Pour les applications pratiques, on recherche expérimentalement la relation existant entre  $N_{L,o}$  et  $\tau/\sigma'_o$  pour différentes valeurs de l'indice des vides. On pose donc

$$N_{L,o} = g(\tau/\sigma'_o, e_o) \quad (4)$$

La figure 2 fournit un exemple de tels résultats expérimentaux. Dans la pratique, la détermination expérimentale de la fonction  $g$  constitue la donnée de base sur le comportement d'un sable soumis à une sollicitation cyclique. Il convient de rappeler que la liste de ses arguments ne se limite pas à  $\tau/\sigma'_o$  et  $e_o$ . En particulier, elle dépend de la forme du trajet de contraintes  $\underline{\sigma}(t)$ , dont le rapport  $\tau/\sigma'_o$  ne caractérise que l'intensité (Ishihara, 1985).

## 2.b interprétation du phénomène

Lors d'un essai non drainé supposé homogène, les déformations volumiques de l'éprouvette sont nulles dès lors que la compressibilité

du fluide et des grains peut être négligée. On ne peut donc mettre en évidence directement les déformations volumiques irréversibles subies par l'éprouvette. En revanche, celles-ci peuvent être visualisées aisément en condition drainée. La figure 3 présente les résultats d'un essai dû à Luong (1980), réalisé à l'appareil triaxial sur une éprouvette de sable parfaitement drainée. Le chargement est purement déviatorique ( $\text{tr} \underline{\underline{\sigma}}' = \text{Cte}$ ) et le déviateur  $q$  est une fonction périodique du temps. La distance entre 2 points du diagramme de la figure 3.b situés sur une droite  $q = \text{Cte}$  représente donc l'accumulation de déformation volumique *irréversible* entre ces deux points.

On se propose de présenter une interprétation du phénomène de liquéfaction basée sur l'existence de ces déformations volumiques irréversibles sous chargement cyclique qui vient d'être rappelée. L'idée de cette interprétation est due à Martin et al. (1975).

#### 2.b.1 partition des déformations en composantes réversible et irréversible

D'un point de vue phénoménologique, la déformation irréversible causée par un chargement donné doit être définie comme la différence entre la déformation mesurée et la contribution réversible, dans la mesure où cette dernière existe. Pour quantifier la déformation irréversible, il convient donc tout d'abord de définir les déformations réversibles. Ceci suppose que l'on soit capable d'isoler une expérience où le comportement du matériau soit réversible, ce qui n'a rien d'évident pour un sable. L'expérience simple de la compression isotrope, telle qu'on peut la réaliser à l'appareil triaxial répond en partie à la question.

##### *expérience de compression isotrope*

On considère une éprouvette parfaitement drainée, préparée dans un appareil triaxial à un indice des vides  $e_0$  dans un état de contraintes initial non déviatorique  $\underline{\underline{\sigma}}_0' = -\sigma_0' \underline{\underline{1}}$ . L'état initial de densité, caractérisé par  $e_0$  est lâche et l'on suppose que le matériau n'a pas

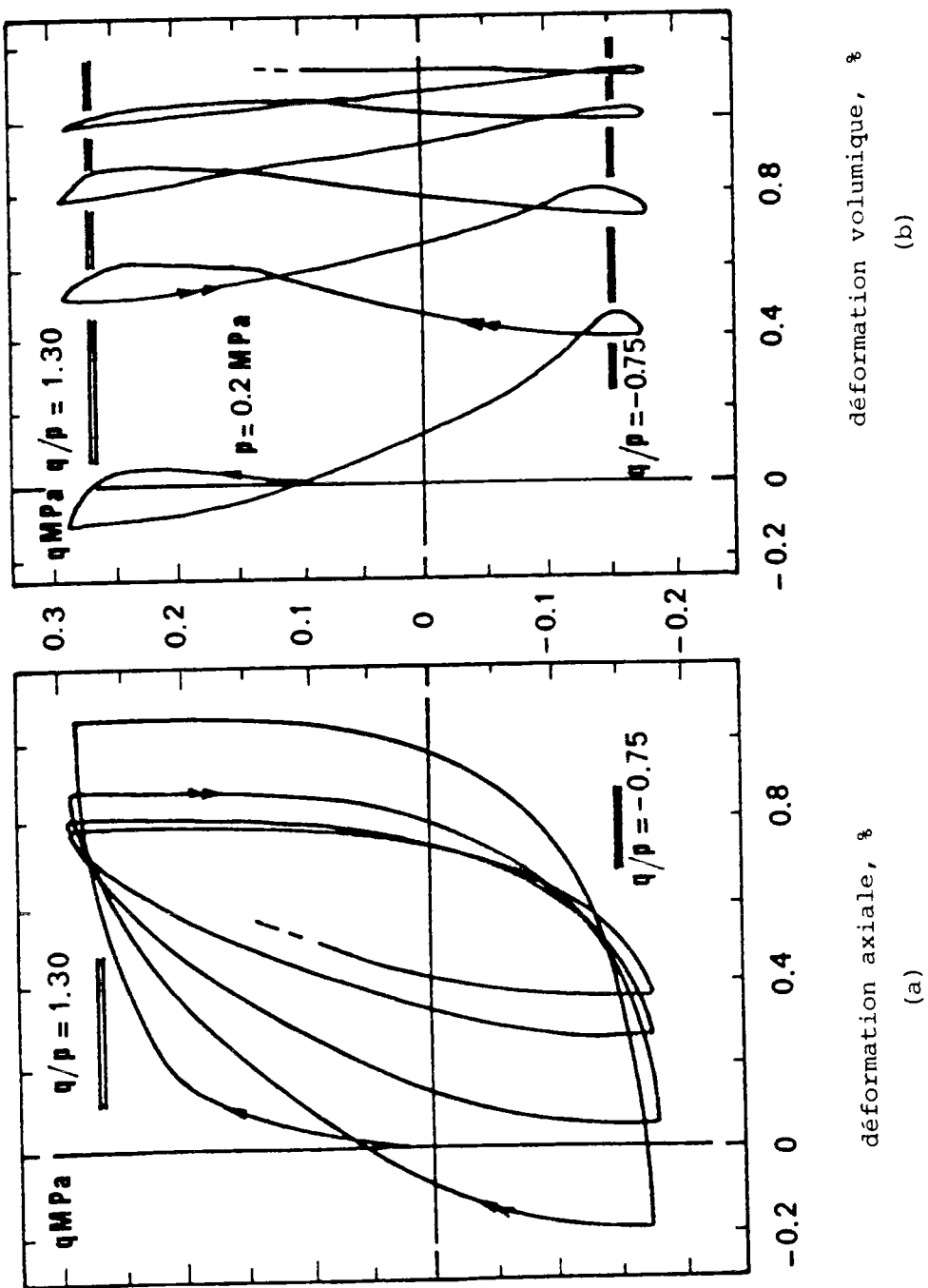


Figure 3. Densification sous cisaillement cyclique à contrainte moyenne constante (d'après Luong, 1980).

été soumis antérieurement à une pression supérieure à  $\sigma'_0$ . On la soumet à un cycle incrémental de pression de confinement :

- variation de la pression de  $\sigma'_0$  à  $\sigma'_0 + d\sigma'$
- retour de  $\sigma'_0 + d\sigma'$  à  $\sigma'_0$

On rend compte traditionnellement des déformations volumiques au cours de ce chargement par la donnée des variations de l'indice des vides, notées respectivement de<sup>(1)</sup> et de<sup>(2)</sup> pour les deux phases de chargement. Il faut distinguer selon le signe de  $d\sigma'$ .

Si  $d\sigma' < 0$ , les résultats expérimentaux sont bien modélisés par les relations suivantes :

$$de^{(1)} = -\kappa \frac{d\sigma'}{\sigma'_0} \quad de^{(2)} = \kappa \frac{d\sigma'}{\sigma'_0} \quad (5)$$

qui font appel à une constante  $\kappa$  caractéristique du matériau. A l'issue du cycle de pression, l'indice des vides n'a pas varié. Le chargement provoque donc des déformations de nature réversible.

Si  $d\sigma' > 0$ , les quantités de<sup>(1)</sup> et de<sup>(2)</sup> deviennent :

$$de^{(1)} = -\lambda \frac{d\sigma'}{\sigma'_0} \quad de^{(2)} = \kappa \frac{d\sigma'}{\sigma'_0} \quad (6)$$

La densification au cours de la charge fait appel à une constante  $\lambda$  supplémentaire vérifiant  $\lambda > \kappa$ . A l'issue du cycle de pression, il subsiste une diminution irréversible de l'indice des vides. En la notant de<sup>irr</sup>, il vient

$$de^{irr} = de^{(1)} - de^{(2)} = -(\lambda - \kappa) \frac{d\sigma'}{\sigma'_0} \quad (7)$$

En opposition au caractère irréversible de la densification mesurée par de<sup>irr</sup>, la variation de<sup>(2)</sup> apparaît de nature réversible. Elle représente la composante de la densification causée par la charge que l'on récupère au cours de la décharge.

L'hypothèse des petites perturbations permet de considérer que les variations de l'indice des vides sont proportionnelles aux déformations volumiques incrémentales  $de_v$  causées par le chargement.

Il est alors naturel de décomposer celles-ci sous la forme

$$d\varepsilon_v = d\varepsilon_v^{irr} + d\varepsilon_v^{rev} \quad (8)$$

avec

$$d\varepsilon_v^{rev} = -\frac{d\sigma'_o}{K} \quad \text{et} \quad K = (1+e_o)\sigma'_o/\kappa \quad (9)$$

La quantité  $K$  représente le module de compressibilité réversible. Il est proportionnel à la contrainte moyenne  $\sigma'_o$ . Cette dépendance linéaire de  $K$  en fonction de  $\sigma'_o$  résulte directement de l'expression (6) de  $d\varepsilon_v^{rev}$ . On rencontre parfois des expressions plus générales du type

$$K = \alpha(\sigma'_o)^n \quad (10)$$

Le réel  $n$  varie typiquement entre 0.5 et 1, les valeurs les plus basses devant être attribuées aux sables de densité élevée (Lambe et Whitman, 1979). L'expression particulière de  $K$  donnée en (9) qui consiste à prendre  $n=1$  est justifiée par le fait que les massifs sous-marins les plus denses sont les moins concernés par le risque d'instabilité sous l'action des forces d'écoulement. C'est donc bien les valeurs élevées de  $n$  qui présentent un intérêt pour ce travail.

#### *généralisation à des états de contraintes non sphériques*

La validité de (9) est limitée au cas de contraintes non déviatoriques. Il convient maintenant de fournir une modélisation pour le calcul des déformations volumiques réversibles dues à une variation  $d\underline{\underline{\sigma}}'$  d'un état de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}'$  dont le déviateur est éventuellement non nul. Il importe également de quantifier les déformations déviatoriques réversibles.

Moyennant une hypothèse d'isotropie des propriétés réversibles, on peut admettre que  $d\varepsilon_v^{rev}$  ne dépend pas de la partie déviatorique de  $d\underline{\underline{\sigma}}'$ . On pose alors :

$$d\varepsilon_v^{rev} = \frac{1}{K(\underline{\underline{\sigma}}')} \cdot \left( \frac{1}{3} \text{tr}(d\underline{\underline{\sigma}}') \right) \quad (11)$$

On peut également décomposer la partie déviatorique  $d\underline{\underline{\delta}}$  de l'incrément

de déformations  $d\epsilon$  en deux contributions respectivement réversible et irréversible :

$$d\epsilon = d\epsilon^{rev} + d\epsilon^{irr} \quad (12)$$

L'étude expérimentale de  $d\epsilon^{rev}$  est sensiblement plus complexe que celle de  $d\epsilon_v^{rev}$ . Ceci est dû au fait que l'on ne dispose pas d'une expérience non incrémentale au cours de laquelle les déformations déviatoriques seraient purement réversibles. S'appuyant sur l'hypothèse d'isotropie des propriétés réversibles, on pose :

$$d\epsilon^{rev} = \frac{1}{2\mu(\sigma'_m)} d\epsilon \quad (13)$$

où  $d\epsilon$  désigne la partie déviatorique de  $d\sigma'$ . Pour achever la modélisation des déformations réversibles donnée par (11) et (13), il faut encore préciser la dépendance de  $K$  et  $\mu$  par rapport à  $\sigma'_m$ . L'étude de l'expérience de compression isotrope démontre la nécessité de prendre en compte une dépendance de  $K$  par rapport à la contrainte effective moyenne  $\sigma'_m = -\frac{1}{3}\text{tr}(\sigma')$ . La dépendance du coefficient  $\mu$  par rapport à  $\sigma'_m$  est également bien établie expérimentalement. Loret (1983) a démontré que  $K$  et  $\mu$  dépendent en outre de la partie déviatorique de  $\sigma'$ . En effet, dans le cas contraire, si l'on modélise le comportement par les relations (11) et (13), une déformation non nulle peut résulter d'un trajet de contraintes effectives fermé. Ceci est contradictoire avec l'idée de déformations réversibles. Toutefois, en guise de première approximation, on se limitera dans la suite de ce travail à prendre en compte la dépendance de  $K$  et  $\mu$  par rapport à  $\sigma'_m$ . Plus précisément, on adoptera la relation

$$K = -\frac{1+\nu}{\kappa} \cdot \left( \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma') \right) \quad (14a)$$

et l'on supposera constant le rapport  $K/\mu$ , à partir duquel peut être défini le coefficient de Poisson par la relation

$$\frac{K}{\mu} = \frac{2}{3} \frac{1+\nu}{1-2\nu} \quad (14b)$$

Il convient maintenant de justifier l'introduction d'une décomposition des déformations en parties réversible et irréversible en montrant qu'elle permet d'interpréter le phénomène de liquéfaction.

## 2.b.2 retour à l'essai de liquéfaction

On se penche à nouveau sur l'essai de liquéfaction introduit au paragraphe 2.a. En dehors des cycles ultimes où le phénomène de liquéfaction apparaît, on observe que les variations de la pression interstitielle s'effectuent en phase avec celles de  $q = \sigma_3 - \sigma_1$ . En particulier, sur un cycle donné, les extrema de  $u$  et  $q$  coïncident. Cependant, contrairement à  $q$ , la pression  $u$  n'est pas périodique. En effet, on observe une légère augmentation de la valeur de la pression interstitielle entre le début et la fin d'un cycle donné. La partition des déformations volumiques définie par (8), (11) et (14a) va fournir une interprétation qualitative des observations qui viennent d'être faites.

La configuration de référence pour le calcul des déformations est celle de l'éprouvette au début de l'essai. On considère un incrément de chargement défini par une variation  $dq$  du déviateur des contraintes. Si les déformations volumiques sont homogènes à l'intérieur de l'éprouvette, (8) et (11) fournissent

$$-\frac{1}{K} d\sigma'_m + d\varepsilon_v^{irr} = 0 \quad (15)$$

En vertu de la relation de Terzaghi, l'incrément de la pression interstitielle est donc donné par

$$du = d\sigma'_m - K d\varepsilon_v^{irr} \quad (16)$$

La pression de confinement  $-\sigma_3$  étant maintenue constante, les variations de la contrainte moyenne totale sont proportionnelles à celles du déviateur. Si les variations de  $K$  au cours d'un cycle de chargement peuvent être négligées, une relation entre les variations à l'intérieur de ce cycle de  $u$ ,  $q$  et  $\varepsilon_v^{irr}$  résulte de (16):

$$\Delta u(t) = \Delta q(t)/3 - K \Delta \varepsilon_v^{irr}(t) \quad (17)$$

Il reste à interpréter (17) à la lumière des observations

expérimentales énoncées précédemment. En dehors de la phase de l'essai où survient la liquéfaction, la contribution principale aux variations de  $u$  dans un cycle donné doit être attribuée aux variations de la contrainte moyenne : c'est le terme  $\Delta q(t)/3$  de l'équation (17). Il rend compte de l'aspect en "dents de scie" de l'évolution dans le temps de  $u$ . Le terme  $K\Delta\varepsilon_v^{irr}$  des déformations volumiques irréversibles varie peu au sein d'un cycle donné. Cependant, il est à l'origine du décalage entre les "dents de scie" correspondant à des cycles successifs  $n^oN$  et  $n^oN+1$  qui n'est autre que  $K(\varepsilon_{v,N+1}^{irr} - \varepsilon_{v,N}^{irr})$ . Et, comme l'avaient vu Martin et al. (1975), c'est l'accumulation des déformations irréversibles qui conduit à la liquéfaction. Ces déformations de signe négatif sont la manifestation du phénomène de contractance.

Ainsi, la partition des déformations est une idée fructueuse pour la compréhension du phénomène de génération de surpressions interstitielles sous chargement cyclique. Elle sera utilisée dans la suite de ce travail dans la forme donnée aux équations (11), (13) et (14).

## 2.c une contribution au calcul de la résistance au cisaillement cyclique

Comme on l'a indiqué au paragraphe 2.a, l'effet de la densité du matériau sur la valeur de  $N_{L,0}$  est pris en compte classiquement par l'indice des vides, comme dans l'équation (4). Par l'étude du cas particulier d'un essai non drainé de cisaillement cyclique comme celui de la figure 1, on se propose de montrer que ce choix n'est pas optimal et de tenter de l'améliorer.

On rappelle que l'état initial de l'éprouvette est caractérisé par l'état de contraintes  $\underline{\sigma}'_0 = -\sigma'_0 \underline{\underline{1}}$  et l'indice des vides  $e_0$ , ce dernier restant constant au cours de l'essai. Au terme du  $N$ -ième cycle, l'état de contraintes effectives est devenu  $\underline{\sigma}' = -\sigma' \underline{\underline{1}}$ , avec  $\sigma' = \sigma'_0 - \psi(N)$ . Si l'on maintient au delà du  $N$ -ième cycle l'amplitude du cisaillement égale à  $\tau$ , le nombre de cycles conduisant à la liquéfaction est réduit à



$N_L = N_{L,o} - N$ . Si l'indice des vides était la bonne variable pour caractériser dans (4) l'état de densification, on aurait donc

$$N_{L,o} - N = g\left(\frac{\tau}{\sigma'_o - \psi(N)}; e_o\right) \quad (18)$$

En utilisant (3b), il vient alors, avec la notation  $u = \psi(N)$

$$N_{L,o} \left(1 - \frac{u}{\sigma'_o}\right) = g(\tau/(\sigma'_o - u)) \quad (19)$$

où l'on a omis l'indice des vides puisqu'il est invariable au cours de l'essai. En identifiant les dérivées par rapport à  $u$  de chaque membre de (19), on obtient :

$$-g(\tau/\sigma'_o) = \frac{\tau \sigma'_o}{(\sigma'_o - u)^2} g'(\tau/(\sigma'_o - u)) \quad (20)$$

Il reste à faire  $u=0$  et à poser  $\rho = \tau/\sigma'$  pour obtenir l'équation différentielle en  $g$  suivante :

$$\rho g'(\rho) + g(\rho) = 0 \quad (21)$$

qui donne

$$g(\rho) = g(\rho_o) \rho_o / \rho \quad (22)$$

*L'allure hyperbolique des variations de  $g$  en fonction de  $\rho$  ainsi obtenue n'est pas en accord avec l'expérience.* A titre d'exemple, on peut citer la relation empirique proposée par Faccioli (1973) :

$$N_{L,o} = \alpha \rho^{-\beta} \quad (23)$$

où  $\alpha$  est un coefficient dépendant de la densité du matériau. Les valeurs usuelles de  $\beta$  sont sensiblement supérieures à 1, typiquement de l'ordre de 5.

L'origine de la difficulté qui vient d'être soulignée réside dans le fait que l'indice des vides d'un élément de sol ne suffit pas à caractériser son état de densification. Plus précisément, lorsque l'on modifie l'état de densité d'un sol, ses propriétés mécaniques changent. Il constitue donc un élément de la mémoire du matériau. Cependant, il paraît raisonnable d'admettre que seule une évolution *irréversible* de cet état de densité puisse modifier le comportement. Il convient donc de définir un indice des vides "irréversible" destiné

à rendre compte de l'influence de l'état de densité sur le comportement du matériau. Dans une variation de l'indice des vides  $e$ , la composante irréversible est, d'après (6) :

$$de^{irr} = de + \kappa d\sigma'_m / \sigma'_m \quad (24)$$

où  $\sigma'_m$  désigne la contrainte effective moyenne. Si l'on se donne un état de référence  $p_a$  pour la pression, on peut donc définir l'indice des vides irréversible  $\mathcal{E}$  par la relation

$$\mathcal{E} = e + \kappa \ln(\sigma'_m / p_a) \quad (25)$$

Cette quantité dépend donc à la fois de l'indice des vides et de la contrainte effective moyenne. Il convient de remarquer qu'un autre choix de  $K(\sigma'_m)$  du type (10) avec  $n \neq 1$  conduirait à une expression différente de  $\mathcal{E}$ . En fait, le point de vue consistant à préférer  $\mathcal{E}$  à  $e$  pour caractériser l'état de densité du matériau n'est pas neuf. On retrouve  $\mathcal{E}$  sous le nom d'indice des vides plastique comme paramètre d'écrouissage dans le modèle de Cam-Clay (Schofield et Wroth, 1968) et chez de nombreux autres auteurs de modèles élastoplastiques. Il reste à montrer que ce nouveau choix est fructueux.

On considère donc une éprouvette dont la contrainte effective moyenne actuelle est  $\sigma'_m$ . Son état de densité initial est caractérisé par  $\mathcal{E}$ . On se propose d'étudier le nombre de cycles provoquant sa liquéfaction en condition non drainée sous l'action d'un chargement déviatorique périodique d'amplitude  $\tau$ . En remplaçant  $e$  par  $\mathcal{E}$  dans (4), on pose

$$N_L = h(\tau / \sigma'_m, \mathcal{E}) \quad (26)$$

On se propose de préciser la forme mathématique de  $h$ . Au terme du  $N$ -ième cycle, la pression interstitielle vaut  $\psi(N)$  et la contrainte effective moyenne a donc diminué. D'après (25), il en est de même de  $\mathcal{E}$  puisque l'indice des vides  $e$  n'a pas varié. La variation de  $\mathcal{E}$  est donnée par

$$\Delta \mathcal{E} = \kappa \cdot \ln(1 - \psi(N) / \sigma'_m) \quad (27)$$

L'équation analogue de (18) s'écrit

$$N_L(1-\alpha) = h\left[\rho/(1-\alpha), \varepsilon + \kappa \cdot \ln(1-\alpha)\right] \quad (28)$$

où l'on a posé  $\alpha = \psi(N)/\sigma'_m$  et  $\rho = \tau/\sigma'_m$ . En identifiant les dérivées des deux membres par rapport à  $\alpha$  en  $\alpha=0$ , on obtient une équation aux dérivées partielles dont  $h(\rho, \varepsilon)$  est solution :

$$\rho \frac{\partial h}{\partial \rho}(\rho, \varepsilon) + h(\rho, \varepsilon) = \kappa \frac{\partial h}{\partial \varepsilon}(\rho, \varepsilon) \quad (29)$$

Puis, en séparant les variables  $\rho$  et  $\varepsilon$  sous la forme  $h(\rho, \varepsilon) = R(\rho)E(\varepsilon)$ , on trouve

$$\rho \frac{R'}{R}(\rho) + 1 = \kappa \frac{E'}{E}(\varepsilon) \quad (30)$$

Il en résulte que les quantités  $\rho \frac{R'}{R}(\rho)$  et  $\frac{E'}{E}(\varepsilon)$  sont des constantes. La forme de la fonction  $h(\rho, \varepsilon)$  est donc la suivante :

$$h(\rho, \varepsilon) = a \rho^{-\beta} e^{(1-\beta)\varepsilon/\kappa} \quad (31)$$

dont on vérifie sans difficulté qu'elle est solution de (28). L'idée de caractériser l'état de densité par l'indice des vides irréversible  $\varepsilon$  a conduit à trouver par le calcul une expression de  $N_L$  cohérente avec les observations expérimentales de Faccioli (1973). Ceci constitue un argument en faveur de ce choix qui est adopté pour la suite de ce travail. De nouveau, on observera qu'une modélisation de  $K(\sigma'_m)$  du type (10) avec  $n \neq 1$  fournirait une autre forme de  $h(\rho, \varepsilon)$ .

## 2.d lien entre essais cycliques drainés et non drainés

La réflexion qui vient d'être présentée sur le comportement des sables sous chargement cyclique a privilégié l'étude du phénomène de liquéfaction. Elle s'est développée sur la base de données des essais non drainés. En fait, force est de constater que le volume des données expérimentales sur le comportement des sables soumis à une sollicitation cyclique en condition drainée est, à ce jour, relativement mince même s'il faut mentionner le contre-exemple des travaux de Martin et al (1975). Le fait que les essais non drainés aient été privilégiés trouve probablement une explication historique,

inscrite dans la chronologie d'une recherche. En effet, il est bien naturel que celle-ci ait porté en premier lieu sur le phénomène de liquéfaction en raison de la menace potentielle que recèle sa dimension "catastrophique". On pourra objecter que la logique de l'hypothèse de Terzaghi devrait conduire à fonder l'étude de tout aspect du comportement d'un sol, serait-ce la liquéfaction, sur des essais drainés. Mais il est bien compréhensible que ce phénomène ait été étudié à partir d'essais non drainés.

En tout état de cause, il paraît intéressant de tenter d'établir un pont entre les deux types d'essais. En d'autres termes, il convient de se demander si la base de données des essais cycliques non drainés peut permettre la prévision d'essais cycliques drainés. Par exemple, la connaissance quantitative du phénomène de génération de pression interstitielle au cours d'un essai de cisaillement cyclique non drainé donne-t-elle accès aux déformations volumiques causées par un tel chargement en condition drainée ? Le présent paragraphe s'efforce de répondre à cette interrogation dont l'intérêt apparaîtra plus clairement au paragraphe 5.a.

#### 2.d.1 prévision des déformations irréversibles par des essais non drainés

On considère deux éprouvettes préparées dans le même état de contraintes effectives initial  $\sigma'_0$  et le même indice de densification  $\varepsilon_0$ . La première est soumise au chargement  $\underline{\sigma}'_0 + \Delta \underline{\sigma}'(t)$  en condition drainée. La seconde subit, *en condition non drainée*, une histoire de contraintes totales identique à l'histoire des contraintes effectives de la première. On se propose de comparer les déformations irréversibles des deux éprouvettes en vue de préciser à quelles conditions les déformations de la seconde constituent une approximation de celles de la première. On adoptera l'hypothèse qu'un incrément de déformation irréversible du sol dépend continûment de l'état de contraintes effectives  $\underline{\sigma}'$ , de l'incrément de contraintes appliqué  $d\underline{\sigma}'$ , et de l'indice de densification  $\varepsilon$ , ce que l'on notera symboliquement :

$$d\underline{\underline{\varepsilon}}^{irr} = \mathcal{F}(\underline{\underline{\sigma}}', d\underline{\underline{\sigma}}', \mathcal{E}) \quad (32)$$

En raison de la génération de surpression interstitielle en condition non drainée, les histoires des contraintes effectives dans les deux éprouvettes sont évidemment différentes. Notant avec le symbole " $\hat{\cdot}$ " les grandeurs correspondant à l'expérience non drainée, il est facile de voir que:

$$\hat{\Delta\underline{\underline{\sigma}}}' = \Delta\underline{\underline{\sigma}}' + \Delta\underline{\underline{u}} \quad (33)$$

Pour que l'approximation de  $\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{irr}$  par  $\hat{\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}}^{irr}$  soit licite, il est nécessaire que les histoires de contraintes effectives  $\underline{\underline{\sigma}}'$  et  $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}'$  restent voisines. Comme on pouvait s'y attendre, ceci assujettit la valeur de  $\hat{\Delta\underline{\underline{u}}}$  à rester "petite" devant  $\|\underline{\underline{\sigma}}'\|$ . En dehors de la donnée de la fonctionnelle  $\mathcal{F}$ , il n'est pas possible de quantifier davantage cette restriction. A défaut, on admettra donc l'approximation en question quand l'écart relatif des chemins de contraintes drainés et non drainé sera faible.

L'absence de drainage au cours de l'essai non drainé s'exprime par la relation :

$$\text{tr}(\hat{\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}}^{e1}) + \text{tr}(\hat{\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}}^{irr}) = 0 \quad (34)$$

soit, si l'on explicite la déformation volumique élastique  $\text{tr}(\hat{\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}}^{e1})$  :

$$\hat{\Delta\underline{\underline{u}}} = -\frac{1}{3}\text{tr}(\Delta\underline{\underline{\sigma}}') - K\text{tr}(\hat{\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}}^{irr}) \quad (35)$$

où l'on a négligé les variations du module de compression réversible  $K$ . La relation (35) permet de voir que l'approximation de  $\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{irr}$  par  $\hat{\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}}^{irr}$  ne sera pas acceptable dans le cas d'un trajet de chargement au cours duquel la contrainte effective moyenne varie "sensiblement". En effet, si le terme  $\frac{1}{3}\text{tr}(\Delta\underline{\underline{\sigma}}')$  ne peut être négligé, alors les chemins de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}'_0 + \Delta\underline{\underline{\sigma}}'$  et  $\hat{\underline{\underline{\sigma}}}'_0 + \hat{\Delta\underline{\underline{\sigma}}}'$  divergent et les déformations irréversibles qu'ils provoquent ne peuvent a priori être confondues. C'est la situation de la figure 1 où l'amplitude des variations de la pression interstitielle sur un cycle n'est pas négligeable. En d'autres termes, l'emploi de la méthode doit être restreint aux chargements essentiellement déviatoriques, ce que l'on retiendra sous

la forme

$$\text{tr} \Delta \underline{\underline{\sigma'}}(t) \approx 0 \quad (36)$$

En particulier, pour un chargement purement déviatorique, la mesure de la pression interstitielle en condition non drainée fournit directement la valeur des déformations irréversibles. Le paragraphe suivant exploite ce résultat.

#### 2.d.2 application à un cycle de cisaillement

On considère une éprouvette dans l'état de contraintes initial  $\underline{\underline{\sigma'}} = -\sigma' \underline{\underline{I}}$  et préparée à l'indice des vides irréversible  $\mathcal{E}$ . On la soumet à un cycle élémentaire drainé d'un chargement purement déviatorique d'amplitude  $\tau$ . On suppose connue la fonction  $h$  de (26) et l'on se propose de calculer les déformations volumiques irréversibles  $\Delta \epsilon_v^{\text{irr}}$  causées par un tel chargement.

Soit  $\Delta u$  la surpression interstitielle que ce chargement provoquerait s'il était appliqué en condition non drainée. On a

$$\Delta u = \frac{\sigma'}{h(\rho, \mathcal{E})} \quad (37)$$

Pour que l'écart relatif des chemins de contraintes effectives en conditions drainée et non drainée soit faible sur la durée d'un cycle, il est suffisant que

$$h(\rho, \mathcal{E}) = N_L \gg 1 \quad (38)$$

Lorsque la condition (38) est vérifiée, on dira que le cycle élémentaire est "peu intense". Avec cette hypothèse, la réflexion du paragraphe ci-dessus conduit à admettre que les conditions de drainage (total, partiel ou nul) affectent de manière négligeable la valeur des déformations recherchées. En particulier, le résultat correspondant à l'essai non drainé noté  $\Delta \epsilon_{\text{nd}}$  peut servir d'approximation pour les autres types d'essais, c'est-à-dire que  $\Delta \epsilon_v^{\text{irr}} \approx \Delta \epsilon_{\text{nd}}$ . La quantité  $\Delta \epsilon_{\text{nd}}$  est reliée à la génération de surpression interstitielle  $\Delta u$  par la

relation  $\Delta u = -K \Delta \varepsilon_{nd}$ . En utilisant l'expression de K donnée en (14a), les relations (3) et (31) dans l'égalité précédente permettent le calcul de  $\Delta \varepsilon_{nd}$  et  $\Delta \varepsilon$  :

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_v^{irr} \approx \Delta \varepsilon_{nd} &= -\frac{\kappa}{1+e} \cdot \frac{\rho^\beta}{a} \cdot \exp((\beta-1)\varepsilon/\kappa) \\ \Delta \varepsilon &= -\frac{\kappa}{a} \cdot \rho^\beta \cdot \exp((\beta-1)\varepsilon/\kappa) \end{aligned} \quad (39)$$

La formule (39) va jouer un rôle important au paragraphe 6 dans le calcul des suppressions interstitielles générées par la houle dans un massif sous-marin.

Il convient d'insister sur le fait que l'état de contraintes initial a été supposé sphérique. On peut sans difficulté généraliser le résultat obtenu au cas d'un état de contraintes initial non purement sphérique à condition d'intégrer les effets du déviateur initial des contraintes dans la fonction h. Toutefois, sur le plan pratique, on se heurte à une insuffisance d'informations expérimentales quantitatives sur la question de l'effet d'un tel déviateur initial vis-à-vis du phénomène de liquéfaction, même si elle a fait l'objet de contributions importantes (voir les synthèses de Pecker (1984) et de Schlosser et al. (1987)). *Dans la description des effets de l'état de contraintes initial sur les déformations irréversibles, on se limitera donc, s'il est non purement sphérique, à la prise en compte de la seule contrainte effective moyenne.*

Pour se débarrasser de la restriction imposée par le caractère peu intense du chargement, c'est-à-dire pour pouvoir s'appuyer sur la base de données des essais non drainés pour la prévision des déformations irréversibles causées par un chargement déviatorique *quelconque*, l'idée consiste simplement à "tronçonner" ce dernier en blocs peu intenses. Pour un chargement périodique, le cycle constitue l'unité élémentaire naturelle de la discrétisation. Le paragraphe suivant est une illustration de cette technique.

### 2.d.3 déformations volumiques causées par un cisaillement cyclique drainé

On considère une histoire  $\Delta\sigma'(t)$  périodique et purement déviatorique. On s'intéresse aux déformations volumiques irréversibles  $\varepsilon_v^{irr}$  subies par un élément de sol soumis à ce chargement à partir d'un état initial défini par les contraintes  $\underline{\sigma}'_0 = -\sigma'_0 \underline{1}$  et l'indice de densification  $\varepsilon_0$ . C'est la situation de l'essai de la figure 3. On suppose de plus qu'un cycle élémentaire est peu intense. Sous cette hypothèse, on se propose de déterminer une valeur approchée expérimentale de  $\varepsilon_v^{irr}$  à partir de la base de données des essais non drainés. Il est bien évident qu'on obtiendrait directement les déformations recherchées en appliquant les contraintes en question à une éprouvette parfaitement drainée. Il s'agit simplement d'illustrer la technique de discrétisation évoquée précédemment.

La contrainte effective moyenne étant constante au cours du chargement, il en est de même du module de compression réversible  $K$ . Au début du  $p$ -ième cycle de chargement, l'indice de densification vaut  $\varepsilon_{p-1}$ . Le cycle élémentaire étant peu intense, la déformation volumique drainée  $\Delta\varepsilon_{dr}^p$  due au  $p$ -ième cycle peut être confondue avec celle que l'on obtiendrait si ce cycle était appliqué en condition non drainée, soit  $\Delta\varepsilon_{nd}^p$ . Or, la génération de pression interstitielle  $\Delta u^p$  causée par ce cycle en condition non drainée est connue : d'après (3b), elle vaut

$$\Delta u^p = \sigma' / N_L = \frac{\sigma'}{h(\tau/\sigma', \varepsilon_{p-1})} \quad (40)$$

Elle est reliée à  $\Delta\varepsilon_{nd}^p$  par la relation

$$\Delta u^p = -K \Delta\varepsilon_{nd}^p = -\frac{1+e}{K} \sigma' . \Delta\varepsilon_{nd}^p \quad (41)$$

La quantité  $(1+e)\Delta\varepsilon_{nd}^p \approx (1+e)\Delta\varepsilon_{dr}^p$  n'est autre que la variation de l'indice des vides au cours du  $p$ -ième cycle. Puisque la contrainte effective moyenne est constante, c'est encore la variation  $\varepsilon_p - \varepsilon_{p-1}$  de l'indice de densification due au  $p$ -ième cycle. En associant (31), (40) et (41), il vient donc



$$\varepsilon_p - \varepsilon_{p-1} = -\frac{\kappa}{a} \rho^\beta \cdot \exp\{(\beta-1)\varepsilon_{p-1}/\kappa\} \quad (42)$$

En "intégrant par rapport à p", on obtient une expression analytique de l'indice de densification en fonction du nombre de cycles :

$$\varepsilon = \varepsilon_o - \frac{\kappa}{\beta-1} \cdot \ln[1 + (\beta-1)p/N_{L,o}] \quad (43)$$

Les quantités  $\beta$  et  $N_{L,o}$  ont été introduites pour la quantification des essais non drainés. La formule (43) prouve qu'elles permettent également le calcul des déformations volumiques au cours d'un essai drainé. Elle constitue donc la passerelle recherchée entre les résultats d'essais déviatoriques cycliques *drainés* et ceux des essais *non drainés*. En ce sens, du point de vue de l'exploitation d'un essai cyclique, le choix des conditions de drainage est indifférent. Il convient néanmoins de garder en mémoire que cette équivalence n'est assurée que si le cycle élémentaire est peu intense ( $N_L \gg 1$ ) et déviatorique.

A partir des éléments qui viennent d'être donnés sur le comportement des sables sous chargement cyclique, il est temps maintenant de rentrer dans le vif du sujet de ce chapitre, c'est-à-dire l'analyse du problème de stabilité.

### 3 - CALCUL DE STABILITÉ EN CONTRAINTES EFFECTIVES : DÉFINITION ET OBSTACLE

#### 3.a position du problème

On considère un massif immergé  $\Omega$  constitué par un sol grenu saturé, pour lequel on suppose que la notion de contraintes effectives est pertinente. Il est délimité supérieurement par le plan d'équation  $y=0$ , inférieurement par le plan d'équation  $y=-h$  ( $h$  étant éventuellement infini) et d'extension latérale infinie. Ce domaine est soumis à un chargement défini par la donnée en fonction du temps  $t$  du champ  $p(x,t)$  des pressions de l'eau sur le plan  $y=0$ , et par le poids volumique  $\gamma$  du matériau biphasique (dans la configuration initiale du squelette). La pression  $p(x,t)$  est la somme de la pression hydrostatique, indépendante du temps, et de la surpression due à la houle qui sera notée  $p_h(x,t)$  (figure 4). Cette dernière est une onde progressive d'amplitude lentement variable. Elle est définie par une fonction numérique  $n(\cdot)$  périodique de période  $L$  et une fonction  $p_0(\cdot)$  par

$$p_h(x,t) = p_0(t) n\left(x - \frac{L}{T}t\right) \quad (44)$$

Les variations de  $p_0(\cdot)$  sont supposées négligeables sur l'échelle de temps définie par  $T$ . Pour un sol grenu, les capacités de résistance sont bien modélisées par un critère portant sur le tenseur des contraintes effectives, c'est-à-dire de la forme  $f(\underline{\sigma} + u\underline{\mathbb{I}}) \leq 0$ , où  $u$  désigne le champ des pressions interstitielles régnant dans le massif. Par conséquent, la stabilité potentielle du massif à l'instant  $t$  sous l'action du chargement défini par  $p(x,t)$  et  $\gamma$  peut être définie par la proposition suivante :

$$\exists \underline{\sigma} \text{ tel que } \begin{cases} y=0: \underline{\sigma}(\underline{M}, t) \cdot \underline{e}_y = -p(\underline{M}, t) \underline{e}_y \\ \text{div} \underline{\sigma} - \gamma \underline{k} = \underline{0} \end{cases} \quad \text{ET} \quad (\forall \underline{M} \in \Omega) f(\underline{\sigma}(\underline{M}, t) + u(\underline{M}, t) \underline{\mathbb{I}}) \leq 0 \quad (45)$$

qui exprime la compatibilité entre l'équilibre du massif soumis au chargement  $p(x,t)$ ,  $\gamma$  et les capacités de résistance. La proposition (45) fait alors apparaître que la connaissance du champ de pressions

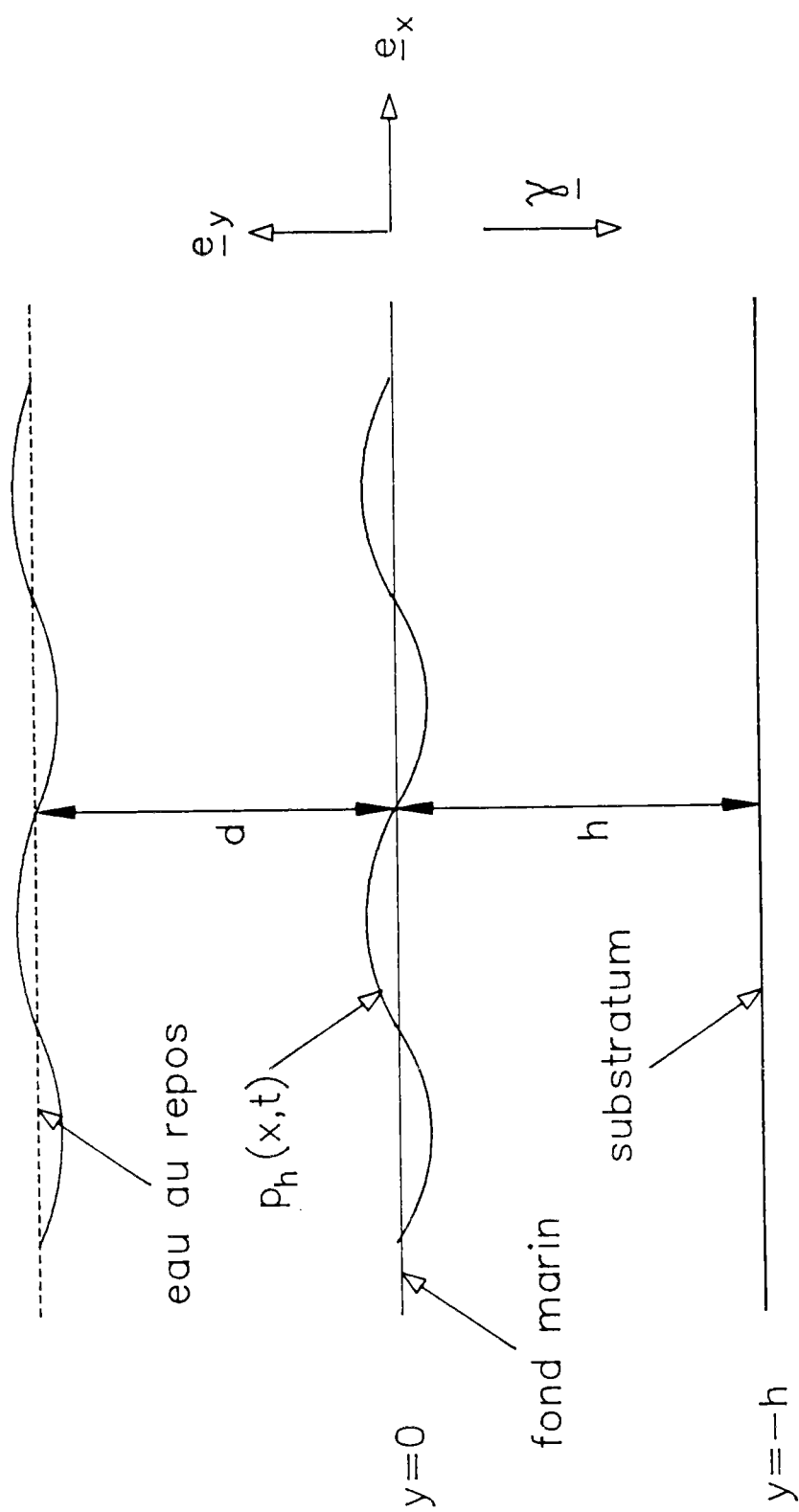


Figure 4. Schéma de principe et notations

interstitielles est nécessaire pour l'étude de la stabilité. La recherche de ce champ constitue donc une phase préliminaire au calcul de la stabilité du massif.

En premier lieu, il convient de préciser les conditions aux limites à vérifier le champ  $u$ . On fait pour toute la suite l'hypothèse de la continuité de la pression du fluide sur le plan  $y=0$ . De plus, pour fixer les idées, le plan  $y=-h$  est supposé imperméable. Il vient donc :

$$\begin{aligned} y=0 : u(x, 0, t) &= p(x, t) \\ y=-h : \frac{\partial u}{\partial n}(x, -h, t) &= 0 \end{aligned} \quad (46)$$

Il est intéressant de remarquer que la donnée de ces conditions aux limites permet de reformuler la proposition (45) sous une forme équivalente "en contraintes effectives" :

$$\exists \underline{\underline{\sigma'}} \text{ tel que } \begin{cases} y=0 : \underline{\underline{\sigma'}}(\underline{M}, t) \cdot \underline{e}_y = \underline{0} \\ \text{div } \underline{\underline{\sigma'}} - \gamma \underline{k} - \text{grad } u = \underline{0} \end{cases} \quad \text{ET } (\forall \underline{M} \in \Omega) f(\underline{\underline{\sigma'}}(\underline{M}, t)) \leq 0 \quad (47)$$

Les deux équations sous l'accolade définissent l'espace affine des champs de contraintes effectives statiquement admissibles avec le chargement. Ce dernier est défini par une densité volumique de forces dans laquelle intervient explicitement la pression interstitielle. On introduit classiquement le vecteur gradient hydraulique défini par

$$\underline{i} = -\underline{k} - \frac{1}{\gamma_w} \cdot \text{grad } u \quad (48)$$

et l'on pose  $\gamma' = \gamma - \gamma_w$ . Par définition, le vecteur  $\underline{i}$  est nul lorsque le champ de pressions interstitielles est hydrostatique. Avec ces notations, les équations qui définissent un champ de contraintes effectives statiquement admissible deviennent :

$$\begin{aligned} y=0 : \underline{\underline{\sigma'}}(\underline{M}, t) \cdot \underline{e}_y &= \underline{0} \\ \text{div } \underline{\underline{\sigma'}} - \gamma' \underline{k} + \gamma_w \underline{i} &= \underline{0} \end{aligned} \quad (49)$$

Le scalaire  $\gamma'$  est appelé communément poids volumique "déjaugé". Il décrit les effets de la pesanteur en contraintes effectives. Le vecteur  $\gamma_w \underline{i}$  représente la densité volumique des forces d'écoulement

agissant sur le squelette. Le scalaire  $\gamma'$  et le champ  $\gamma_w \underline{i}$  caractérisent le chargement en contraintes effectives.

Pour achever la recherche du champ  $u$ , il reste à adjoindre à (46) l'équation de champ à vérifier par cette grandeur. Elle a été donnée au chapitre II :

$$\frac{k}{\gamma_w} \Delta u = \frac{\partial}{\partial t} (\text{tr} \underline{\underline{g}}) \quad (50)$$

Elle fait apparaître un couplage entre le fluide et le squelette qui rend impossible le calcul "séparé" de la pression interstitielle en dehors du cas du régime permanent (cf. Coussy, 1978) où ce couplage disparaît. La définition du chargement en contraintes effectives nécessite donc en fait la résolution complète du problème aux limites, ce qui implique au passage la donnée de la loi de comportement du squelette. A ce stade, le calcul de stabilité n'a plus guère d'intérêt.

### 3.b obstacle à la résolution du problème aux limites

Malheureusement, d'une manière générale, la résolution numérique d'un problème aux limites dans le domaine des sollicitations cycliques présente une grande complexité. On se heurte d'abord à des difficultés d'ordre rhéologique. En effet, malgré l'effort important consacré à l'étude du comportement des sols saturés sous chargement cyclique, aucune des lois de comportement qui ont été proposées pour modéliser la réponse à ce type de chargement n'a pu encore s'imposer dans la pratique. En aval de ce problème de rhéologie, on rencontre la question difficile du traitement numérique du couplage fluide-squelette.

Puis des interrogations spécifiques apparaissent, liées à la modélisation du chargement de la houle. Il s'agit d'une sollicitation périodique, comportant en général un nombre élevé de cycles. Chacun d'entre eux doit être lui-même discrétisé d'une manière suffisamment

fine. Il en résulte des temps de calculs considérables, et un risque d'imprécision accrue sur les résultats obtenus. Il reste encore la question des conditions aux limites. Une fois définie la pression sur le fond marin et fixées les conditions aux limites à une distance infinie de celui-ci ou au niveau d'un substratum, selon la configuration du problème, il reste à préciser les conditions aux limites aux bornes "latérales" du domaine qui fera l'objet de l'étude. Celles-ci ne pouvant être qu'arbitraires, on est amené à lui donner une dimension latérale suffisamment grande pour que les "effets de bords" puissent être négligés.

Etant donnée l'importance des recherches expérimentales qui ont été menées pour comprendre le rôle de l'eau interstitielle dans le comportement des sols sous chargements cycliques, il serait profondément insatisfaisant d'en rester au constat d'échec exprimé par ce paragraphe et le précédent. Pour aller de l'avant, les développements de ce chapitre seront construits sur une simplification qui consiste à *découpler artificiellement* le calcul de la pression interstitielle, selon une idée introduite par Seed et al.(1976) ainsi que Smits et al.(1979), et qui a bénéficié d'une large audience.

L'intérêt de ce découplage, dont les modalités restent à préciser, réside dans le fait qu'une estimation approchée du champ de pressions interstitielles fournit au même degré d'approximation une estimation du chargement en contraintes effectives. Un calcul de stabilité en contraintes effectives, lui-même approché, peut alors être développé.

Il convient en premier lieu d'exposer cette technique de découplage telle que ses auteurs la présentent. Au terme d'une analyse critique, on en proposera une reformulation destinée à apporter les améliorations qui paraissent nécessaires pour les applications au problème de stabilité considéré.

## 4 - LA MÉTHODE DÉCOUPLÉE DE SEED

### 4.a calcul de la pression interstitielle

Ce paragraphe présente, dans un formalisme quelque peu différent, la méthode développée par Seed et al. (1976) pour un calcul *découplé* de la pression interstitielle. Initialement introduite pour l'étude du phénomène de génération de pression interstitielle sous l'action de la sollicitation sismique, cette méthode a été appliquée ultérieurement à la sollicitation de la houle par Seed et Rahman (1978), puis Rahman et Jaber (1986). Elle s'applique à une sollicitation périodique, pour laquelle la notion de cycle a donc un sens. Elle repose sur la partition des déformations en contributions réversible et irréversible. En utilisant (8) dans (50), on obtient :

$$\frac{k}{\gamma_w} \Delta u = \frac{\partial}{\partial t} (\text{tr} \underline{\underline{\epsilon}}^{el}) + \frac{\partial}{\partial t} (\text{tr} \underline{\underline{\epsilon}}^{irr}) \quad (51)$$

Par définition de  $\underline{\underline{\epsilon}}^{el}$ , il vient encore

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{tr} \underline{\underline{\epsilon}}^{el}) = \frac{1}{K} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} \right\} \quad (52)$$

où K désigne le coefficient de compressibilité volumique élastique. On introduit alors la quantité  $\dot{u}_g$  définie par :

$$\dot{u}_g = -K \text{tr}(\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^{irr}) \quad (53)$$

qui a la dimension d'un taux de pression. En utilisant (52) et (53) dans (51), il vient :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) + \dot{u}_g + \frac{Kk}{\gamma_w} \Delta u = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (54)$$

L'équation (54) indique que la pression interstitielle est solution d'une équation de diffusion avec sources. La source de pressions provient d'une part des variations de la contrainte moyenne totale et d'autre part, des déformations volumiques irréversibles causées par le chargement, représentées par  $\dot{u}_g$ . L'approximation proposée par Seed

consiste à évaluer ces deux contributions à la source de pression en adoptant les deux hypothèses suivantes :

(i) La quantité  $\dot{u}_g$  peut être évaluée à partir d'essais non drainés au laboratoire, effectués sur des échantillons soumis à un chargement destiné à simuler la sollicitation réelle.

Plus précisément, on suppose connue la solution en contraintes totales  $\underline{\sigma}^o(M, t)$  du problème étudié, dans le cas où le *squelette est supposé élastique linéaire isotrope*. On applique alors le chargement défini par  $\underline{\sigma}^o(M, t)$  à un échantillon non drainé au laboratoire préparé pour les conditions de contraintes et de densité initiales du point M. En enregistrant la pression interstitielle à la fin de chaque cycle, on détermine la fonction  $\psi(N)$  qui a été introduite au paragraphe 2.a. En notant T la période de la sollicitation, l'hypothèse (i) consiste à poser :

$$(\forall t \in [nT, nT+T[) \dot{u}_g(M, t) = \frac{1}{T} \cdot \{\psi(n+1) - \psi(n)\} \quad (55)$$

En raison de la périodicité de la sollicitation, la moyenne sur un cycle de la quantité  $\frac{\partial}{\partial t} \text{tr}(\underline{\sigma}^o)$  est nulle. En admettant la validité de la simulation du champ réel par  $\underline{\sigma}^o$ , les auteurs s'appuient sur cette observation pour énoncer l'hypothèse suivante :

(ii) le terme  $\frac{\partial}{\partial t} \text{tr}(\underline{\sigma})$  peut être négligé pour le calcul de u.

Les hypothèses (i) et (ii), dont les limites seront examinées un peu plus tard, permettent d'évaluer la pression interstitielle générée par le chargement grâce à la bonne connaissance expérimentale de la fonction  $\psi$ . En utilisant (3a) et (4) dans (55), il vient

$$\dot{u}_g(M, t) = \frac{1}{T} \cdot \sigma'_o / g(\tau / \sigma'_o, e_o) \quad (56)$$

En combinant les relations (54) et (56) ainsi que l'hypothèse (ii), on obtient l'équation de diffusion proposée par Seed pour la détermination de la pression interstitielle :



$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \Delta u + \frac{1}{T} \cdot \sigma'_o / g(\tau / \sigma'_o, e_o) \quad (57)$$

avec la notation

$$c_v = \frac{Kk}{\gamma_w} \quad (58)$$

On reconnaît dans le paramètre  $c_v$  de (17) le coefficient de consolidation utilisé classiquement dans la théorie de la consolidation de Terzaghi. Il contrôle l'intensité du phénomène de dissipation des surpressions générées par la sollicitation vers les zones drainantes du massif.

La littérature concernant cette méthode découplée est malheureusement peu précise sur les conditions aux limites à prendre en compte pour le calcul de la solution de (57). L'usage est de remplacer les conditions aux limites réelles lorsqu'elles varient en fonction du temps par "leur moyenne par cycle" (Rahman et Jaber, 1986).

Indépendamment des interrogations qu'inspirent légitimement le procédé de calcul qui vient d'être présenté, et qui seront examinées au paragraphe 5, il présente donc l'intérêt de prendre en compte simultanément le couplage des phénomènes de génération et de dissipation des surpressions générées.

#### 4.b calcul de stabilité

L'idée du calcul de stabilité introduite par Seed et Rahman (1978) pour les massifs sous-marins, que l'on retrouve chez Ishihara et Yamazaki (1984) ainsi que Rahman et Jaber (1986) provient des méthodes d'évaluation du potentiel de liquéfaction d'une couche de sable soumise à un séisme. Plus précisément, le calcul de stabilité qu'ils développent repose sur l'identification des concepts d'instabilité et de liquéfaction. En d'autres termes, il n'est pas fait référence à l'instabilité en dehors de l'apparition de la liquéfaction. Ceci étant, le calcul de stabilité s'articule en 2 phases :

- le calcul de la pression interstitielle  $u$
- la détermination de la zone instable

Cette dernière est identifiée à la zone supposée liquéfiée délimitée par le lieu des points d'équation  $u=\gamma'|y|$ . Un exemple numérique emprunté à Rahman et Jaber (1986) est présenté à l'Annexe 1.

D'un point de vue historique, il semble donc que les méthodes utilisées dans l'étude du risque sismique aient été "importées" en Géotechnique marine. La suite de ce travail s'attachera à indiquer les limites de cette démarche analogique.

## 5 - QUELQUES CONSIDÉRATIONS SUR LA MÉTHODE DÉCOUPLÉE

### 5.a remarques générales

L'hypothèse (i) qui met en oeuvre l'idée même de découplage et sur laquelle repose donc la méthode focalise l'attention et ... la suspicion. Elle constitue le point de départ d'un type de raisonnement classique en Mécanique des Sols connu sous le nom de *méthode du chemin de contraintes*. Il consiste à postuler *arbitrairement* la forme du champ de contraintes en remplaçant le champ réel inconnu par un champ statiquement admissible connu. Pour des raisons pratiques, il s'agit souvent du champ de contraintes élastique. Une fois cet "échange" réalisé, on examine au laboratoire les phénomènes anélastiques en terme de déformations ou de pressions interstitielles qui résultent de l'application de ces contraintes à un échantillon du matériau étudié. En résumé, deux approximations majeures sont consenties, dont il convient de tenter de cerner le domaine de validité.

#### (a) L'approximation du champ de contraintes réel

La simulation du champ réel par un champ de contraintes statiquement admissible à construire constitue à la fois la pierre angulaire et la pierre d'achoppement de la méthode du chemin de contraintes. Il convient d'observer que l'absence de "couplage" entre le comportement du matériau et le choix de la simulation reviendrait à supposer que le comportement est statiquement déterminé. Une mise en oeuvre acceptable de la méthode du chemin de contraintes doit donc chercher à "coupler" le plus possible les connaissances disponibles sur le comportement et le choix de la simulation.

#### (b) L'approximation des déformations irréversibles réelles

Supposant maintenant qu'une simulation appropriée des contraintes réelles est disponible, il faut s'interroger sur la *faisabilité* d'une détermination approchée par voie expérimentale des déformations

irréversibles réelles.

On suppose donc connue l'histoire des contraintes effectives  $\sigma'(M,t)$ . A défaut de disposer d'une loi de comportement permettant d'évaluer *par le calcul* les déformations irréversibles causées par le chargement, une idée naturelle consiste à exercer ce dernier au laboratoire, sur une éprouvette. Ce procédé se propose donc de déterminer *par la mesure* les déformations recherchées. Puisque les déformations du squelette dépendent des contraintes effectives appliquées, il suffit d'appliquer le chargement défini par  $\sigma'(M,t)$  à une éprouvette parfaitement drainée, c'est-à-dire dans laquelle la pression interstitielle est assujettie à rester nulle. Pour les sables dont la perméabilité est élevée, un essai drainé est tout à fait réaliste. Ce point de vue a été adopté par Martin et al.(1975) et les a conduit à proposer une relation empirique permettant de calculer les déformations volumiques dans un essai drainé de cisaillement cyclique à la boîte de cisaillement simple. Elle est utilisée dans le modèle de Finn et al (1977). Cependant, le nombre important de paramètres qu'elle met en jeu (7) constitue un frein sérieux à son emploi. D'autre part, aucune généralisation n'en a été proposée dans des conditions de chargement autres que celles de la boîte de cisaillement simple. En particulier, il paraît délicat d'y recourir pour un chargement aussi complexe que celui induit par la houle.

L'alternative consiste à s'appuyer sur l'abondante base de données constituée par les résultats d'essais non drainés cycliques de laboratoire. En effet, si la simulation du champ de contraintes réel peut être discrétisée en cycles de chargement peu intenses et déviatoriques, le paragraphe 2.d a montré comment les déformations volumiques irréversibles pouvaient être évaluées.

#### 5.b remarques sur la méthode de Seed

Il convient tout d'abord de saluer le sens physique de la méthode mise en oeuvre par Seed. Son mérite majeur est sans doute de souligner la

nécessité d'une prise en compte simultanée des phénomènes de génération et de dissipation de la pression interstitielle. Cependant, à la lumière de la réflexion présentée au paragraphe 2 sur le comportement des sables et des remarques générales qui viennent d'être énoncées, une analyse critique de la méthode de Seed s'impose. Elle débouchera au paragraphe 6 sur une reformulation de la méthode découplée.

La critique essentielle porte sur le choix d'une simulation du champ de contraintes réelles qui fait appel à la solution de Madsen (1978). Il convient de rappeler (cf. Chap.II) que celle-ci a été construite pour un squelette élastique linéaire. Or, comme cela a été indiqué au paragraphe 2, les déformations réversibles d'un sol sont régies par une loi non linéaire. On voit donc mal, a priori, le lien physique qui peut exister entre la solution de Madsen et une simulation du champ de contraintes réel. Cette simulation n'intègre donc pas d'informations sur les propriétés réversibles du sable. Elle n'en contient pas davantage sur le comportement anélastique de ce matériau vis-à-vis du cisaillement cyclique.

Au-delà du choix de la simulation des contraintes, il convient également de s'interroger sur l'évaluation des déformations volumiques irréversibles qui interviennent dans la méthode par l'intermédiaire du paramètre  $\bar{u}_g$ . Elle s'appuie sur la base de données des essais non drainés. En la matière, la critique porte sur l'absence de discrétisation du chargement, à défaut de laquelle la quantité  $\bar{u}_g$  est considérée comme constante.

La dernière interrogation concerne l'hypothèse (ii). L'argumentation présentée pour introduire cette hypothèse est quelque peu imprécise. L'examen de (54) indique que la source de pressions interstitielles est constituée de 2 termes, l'un dû aux déformations irréversibles et l'autre correspondant aux variations de la contrainte moyenne totale. L'hypothèse (ii) consiste à négliger ce dernier. Cette simplification implique que le critère de stabilité " $u = \gamma' |y|$ " porte exclusivement sur

la pression interstitielle se rapportant aux déformations irréversibles. Il est instructif de la confronter aux résultats expérimentaux de la figure 1. Le paragraphe 2.b.2 a présenté une analyse détaillée de l'enregistrement de la pression interstitielle au cours de cet essai. Elle a mis en évidence l'importance du terme de variation des contraintes totales dans l'équation (17) pour la compréhension de la réponse d'un sol soumis à un chargement cyclique. Sans être la cause du phénomène de liquéfaction, il n'est pas pour autant négligeable dans l'évaluation des pressions interstitielles. C'est pourquoi il paraît dangereux de négliger a priori la contribution du terme  $\frac{\partial}{\partial t}(\text{tr}\underline{\sigma})$  dans (54). Cette observation sera confirmée au paragraphe 7.d, au niveau du calcul de stabilité et motive une reformulation de la méthode découplée qui fasse l'économie de l'hypothèse (ii).

## 6 - REFORMULATION DE LA MÉTHODE DÉCOUPLÉE

### 6.a principe de la reformulation

#### 6.a.1 équations du problème

Au coeur de la méthode découplée réside l'idée d'évaluer à part le champ  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{irr}(\underline{\underline{M}}, t)$  des déformations irréversibles causées par le chargement. Dans cet esprit, le principe de la reformulation qui va être proposée consiste à considérer que le chargement est caractérisé d'une part par la fonction  $p(\underline{\underline{M}}, t)$  et d'autre part par le champ  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{irr}(\underline{\underline{M}}, t)$ . Certes, ce découplage peut paraître factice, puisque les déformations irréversibles sont causées par la surpression  $p_h(\underline{\underline{M}}, t)$  qui s'exerce sur le plan  $y=0$ . Mais cette nouvelle position du problème est bien conforme à l'idée de la méthode découplée, qui propose d'évaluer  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{irr}(\underline{\underline{M}}, t)$  par des essais de laboratoire.

On observera que le parti pris de considérer le champ  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{irr}$  comme un paramètre de chargement confère au problème aux limites examiné, qui sera noté  $(\mathcal{P})$ , la même structure qu'un problème poroélastique avec déformations imposées (par exemple d'origine thermique). Du point de vue mathématique, le champ  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{irr}$  joue dans  $(\mathcal{P})$  un rôle analogue à celui des déformations d'origine thermique d'un tel problème. Ce nouveau point de vue amène à écrire les équations reliant les grandeurs physiques du problème, non pas en vitesses, mais sous forme intégrée par rapport au temps.

Avant que le chargement de la houle soit appliqué, le massif est en équilibre sous l'action de la pression hydrostatique sur le plan  $y=0$  et celle des forces volumiques de pesanteur. On suppose que la distribution des pressions interstitielle initiale  $u_0$  est hydrostatique et l'on note  $\underline{\underline{\sigma}}'_0$  le champ de contraintes effectives initial. Les déplacements  $\underline{\underline{\xi}}$  et les déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  seront calculés à partir de cette configuration initiale.

On note alors  $\delta \underline{\underline{\sigma}}'$  la variation des contraintes effectives causée par l'application des surpressions de la houle sur le plan  $y=0$ . On note encore  $\delta u$  le champ des surpressions interstitielles par rapport à la distribution hydrostatique. A l'instant initial  $t=0$ , les champs  $\delta \underline{\underline{\sigma}}'$ ,  $\delta u$  et  $\xi$  sont nuls. Pour  $t \geq 0$ , les conditions aux limites en contraintes effectives, pression interstitielle et déplacements s'écrivent

$$y=0 : \delta \underline{\underline{\sigma}}'(\underline{M}, t) \cdot \underline{e}_y = \underline{0} ; \delta u(\underline{M}, t) = p_h(\underline{M}, t) \quad (59a)$$

$$y=-h : \xi = 0 ; \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (59b)$$

Le champ  $\delta u$  des pressions interstitielles que l'on cherche à caractériser est relié aux champs de contraintes effectives  $\delta \underline{\underline{\sigma}}'(\underline{M}, t)$  et de déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{M}, t)$  :

$$\text{div } \delta \underline{\underline{\sigma}}' = \text{grad } \delta u \quad (60)$$

$$\frac{k}{\gamma_w} \Delta(\delta u) = \frac{\partial}{\partial t} (\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}) \quad (61)$$

Le tenseur de déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  est la somme d'une contribution irréversible  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{irr}}$  supposée connue et d'une contribution réversible :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \int \frac{1}{2\mu(\sigma'_m)} d\underline{\underline{\varepsilon}} + \int \frac{-1}{K(\sigma'_m)} d\sigma'_m \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{irr}} \quad (62)$$

Enfin, le champ de déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  doit être compatible géométriquement, soit :

$$\text{rot}^d(\text{rot}^g \underline{\underline{\varepsilon}}) = \underline{\underline{0}} \quad (63)$$

et dériver d'un champ de déplacements vérifiant la condition donnée en (59b) :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\text{grad } \underline{\underline{\xi}} + {}^t \text{grad } \underline{\underline{\xi}}) \quad (64)$$

L'objectif est d'établir le lien fonctionnel existant entre la pression interstitielle  $\delta u$  d'une part, et les champs  $p_h(\underline{M}, t)$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{irr}}(\underline{M}, t)$  d'autre part.

#### 6.a.2 une simplification dans la modélisation des déformations réversibles

Pour un chargement quelconque, les paramètres  $\mu$  et  $K$  qui quantifient



les déformations réversibles du squelette dans (62) sont a priori variables dans le temps puisqu'ils dépendent de la contrainte effective moyenne  $\sigma'_m$ . L'augmentation du niveau moyen de la pression interstitielle dû aux déformations irréversibles va conduire vraisemblablement à une diminution de  $\sigma'_m$ . Toutefois, en première approximation, on adoptera la simplification qui consiste à négliger les variations de  $\mu$  et  $K$  qui en résultent :

$$\begin{aligned}\mu(\sigma'_m) &\approx \mu(\sigma'_{m,o}) \\ K(\sigma'_m) &\approx K(\sigma'_{m,o})\end{aligned}\tag{65}$$

De plus, le champ  $\sigma'_o$  étant une inconnue, il est nécessaire de formuler une hypothèse sur la valeur de  $\sigma'_{m,o}$ . En la matière, on se réfère au concept classique de poussée des terres au repos en admettant l'existence d'un scalaire  $K_o$  tel que

$$\sigma'_{m,o} = (1+2K_o)\gamma' |y|/3\tag{66}$$

Les caractéristiques des déformations réversibles du matériau ont donc le type d'hétérogénéité qui a été étudié au paragraphe (II.3.c.6).

### 6.a.3 décomposition du problème ( $\mathcal{P}$ )

Sur la base de la simplification qui vient d'être introduite, l'idée de découplage conduit maintenant à définir deux problèmes, notés symboliquement ( $\mathcal{P}_e$ ) et ( $\mathcal{P}_a$ ), dérivés de ( $\mathcal{P}$ ) de la manière suivante :

.Le problème ( $\mathcal{P}_e$ ) coïncide avec le problème ( $\mathcal{P}$ ) lorsque l'on remplace l'équation (62) par

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{\mu(\sigma'_{m,o})} \delta \underline{\underline{\underline{s}}} + \frac{-1}{K(\sigma'_{m,o})} \delta \sigma'_m \underline{\underline{\underline{I}}}\tag{67}$$

En d'autres termes, il s'agit du problème poroélastique pour lequel le chargement est défini par la fonction de pressions  $p_h(\underline{\underline{M}}, t)$ .

.Le problème ( $\mathcal{P}_a$ ) coïncide avec le problème ( $\mathcal{P}$ ) lorsque l'on remplace l'équation (59a) par

$$y=0 : \delta \underline{\underline{\sigma}}'(\underline{M}, t) \cdot \underline{e}_y = 0 ; \quad \delta u(\underline{M}, t) = 0 \quad (68)$$

Dans ce problème, le chargement est donc défini par le champ des déformations irréversibles  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{irr}(\underline{M}, t)$  dont on rappelle qu'il est considéré comme une donnée.

Les conditions initiales de  $(\mathcal{P}^e)$  et  $(\mathcal{P}^a)$  sont nulles. On rassemble ci-dessous l'ensemble des équations vérifiées par les solutions respectives  $\underline{\underline{\sigma}}'^e, u^e, \underline{\underline{\xi}}^e$  et  $\underline{\underline{\sigma}}'^a, u^a, \underline{\underline{\xi}}^a$  de  $(\mathcal{P}_e)$  et  $(\mathcal{P}_a)$ .

problème $(\mathcal{P}_e)$	problème $(\mathcal{P}_a)$
$\text{div } \underline{\underline{\sigma}}'^e = \text{grad } u^e$	$\text{div } \underline{\underline{\sigma}}'^a = \text{grad } u^a$
$\frac{k}{\gamma_w} \Delta(u^e) = \frac{\partial}{\partial t}(\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}^e)$	$\frac{k}{\gamma_w} \Delta(u^a) = \frac{\partial}{\partial t}(\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}^a)$
$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \frac{1}{2}(\text{grad } \underline{\underline{\xi}}^e + {}^t \text{grad } \underline{\underline{\xi}}^e)$	$\underline{\underline{\varepsilon}}^a = \frac{1}{2}(\text{grad } \underline{\underline{\xi}}^a + {}^t \text{grad } \underline{\underline{\xi}}^a)$
$y=0 : \delta \underline{\underline{\sigma}}'^e(\underline{M}, t) \cdot \underline{e}_y = 0 ; \quad u^e(\underline{M}, t) = p_h(\underline{M}, t)$	$\delta \underline{\underline{\sigma}}'^a(\underline{M}, t) \cdot \underline{e}_y = 0 ; \quad u^a(\underline{M}, t) = 0$
$y=-h : \quad \underline{\underline{\xi}}^e = 0 ; \quad \frac{\partial u^e}{\partial n} = 0$	$\underline{\underline{\xi}}^a = 0 ; \quad \frac{\partial u^a}{\partial n} = 0$
$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \frac{1}{\mu(\sigma'_{m,o})} \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \frac{1}{K(\sigma'_{m,o})} \sigma'_{m,e} \underline{\underline{1}}$	$\underline{\underline{\varepsilon}}^a = \frac{1}{\mu(\sigma'_{m,o})} \underline{\underline{\varepsilon}}^a + \frac{1}{K(\sigma'_{m,o})} \sigma'_{m,a} \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{irr}$

Il est facile de voir que les champs de contraintes  $\delta \underline{\underline{\sigma}}'$ , de déplacements  $\underline{\underline{\xi}}$ , et de surpression interstitielle  $\delta u$  solutions de  $(\mathcal{P})$  sont respectivement somme des champs de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}'^e$  et  $\underline{\underline{\sigma}}'^a$ , de déplacements  $\underline{\underline{\xi}}^e$  et  $\underline{\underline{\xi}}^a$ , de pressions interstitielles  $u^e$  et  $u^a$ . On notera symboliquement

$$(\mathcal{P}) = (\mathcal{P}_e) + (\mathcal{P}_a) \quad (69)$$

En particulier, il est intéressant d'interpréter la décomposition de

la surpression interstitielle  $\delta u$  dans le massif comme la somme de 2 contributions, l'une d'origine élastique et l'autre d'origine irréversible :

$$\delta u = u^e + u^a \quad (70)$$

L'expression de  $u^e$  a été donnée au chapitre II dans le cas où  $d=\infty$ . Lorsque l'épaisseur du massif est finie, la détermination de  $u^e$  peut être réalisée numériquement (Gatmiri, 1989). A ce stade, l'équation ci-dessus n'est certes pas opérationnelle pour le calcul de  $\delta u$ , puisque  $u^a$  reste une inconnue. L'exploitation de (70) passe donc par la recherche de la solution de  $(\mathcal{P}_a)$ .

#### 6.a.4 Etude de $(\mathcal{P}_a)$

L'intérêt d'introduire le problème  $(\mathcal{P}_a)$  dépend évidemment des informations dont on dispose sur le champ  $\underline{\varepsilon}^{irr}$ . En d'autres termes, le point de vue qui consiste à traiter  $\underline{\varepsilon}^{irr}$  comme composante du chargement n'est fructueux que si l'on est en mesure d'évaluer cette grandeur. L'étude de  $(\mathcal{P}_a)$  doit donc s'appuyer sur les propriétés du champ  $\underline{\varepsilon}^{irr}$  et prendre en compte les limites de la connaissance que l'on peut espérer avoir de ce champ.

La fonction  $p(x,t)$  étant, à chaque instant  $t$ , périodique par rapport à la variable  $x$ , cette propriété est également assurée pour le champ  $\underline{\varepsilon}^{irr}(\underline{M},t)$ . Il en est encore de même pour tous les champs intervenant dans les équations du problème  $(\mathcal{P}_a)$ . Cette observation est indépendante du comportement du matériau constituant le massif. Elle repose exclusivement sur l'hypothèse d'invariance par translation parallèlement à  $\underline{e}_x$  des données du problème et sur les propriétés de la fonction  $p_h$ .

Pour exploiter la périodicité de  $\underline{\varepsilon}^{irr}$  par rapport à l'abscisse  $x$ , il est naturel d'introduire une moyenne géométrique du problème  $\mathcal{P}_a$ . On définit donc pour une fonction  $f(x)$  intégrable quelconque sa moyenne géométrique  $\langle f \rangle$  sur une longueur d'onde par :

$$\langle f \rangle(x) = \frac{1}{L} \int_x^{x+L} f(s) ds \quad (71)$$

La solution du problème  $\langle \mathcal{P}_a \rangle$ , moyenne géométrique du problème  $\mathcal{P}_a$  au sens de (71), est constituée par les champs  $\langle \underline{\sigma}^a \rangle$ ,  $\langle \underline{\xi}^a \rangle$  et  $\langle u^a \rangle$ . Elle résoud par construction les équations suivantes:

$$\text{div } \langle \underline{\sigma}'^a \rangle = \text{grad } \langle u^a \rangle \quad (72a)$$

$$\frac{k}{\gamma_w} \Delta(\langle u^a \rangle) = \frac{\partial}{\partial t} (\text{tr} \langle \underline{\xi}^a \rangle) \quad (72b)$$

$$\langle \underline{\xi}^a \rangle = \frac{1}{\mu(\sigma'_{m,o})} \langle \underline{s}^a \rangle + \frac{1}{K(\sigma'_{m,o})} \langle \sigma'_m{}^a \rangle_{II} + \langle \underline{\xi}^{irr} \rangle \quad (72c)$$

$$\langle \underline{\xi}^a \rangle = \frac{1}{2} (\text{grad } \langle \underline{\xi}^a \rangle + {}^t \text{grad } \langle \underline{\xi}^a \rangle) \quad (72d)$$

$$y=0 : \langle \sigma'^a \rangle(\underline{M}, t) \cdot \underline{e}_y = 0 ; \langle u^a \rangle(\underline{M}, t) = 0 \quad (72e)$$

$$y=-h : \langle \underline{\xi}^a \rangle = 0 ; \frac{\partial \langle u^a \rangle}{\partial n} = 0 \quad (72f)$$

$$(\forall t \geq 0) \langle u^a \rangle(y, t) = 0 \quad (72g)$$

L'avantage du problème  $\langle \mathcal{P}_a \rangle$ , qui motive son introduction, réside dans le fait qu'il est possible d'en construire la solution à partir de la donnée de  $\langle \underline{\xi}^{irr} \rangle$ . Une fois ce travail fait, il restera à exploiter le problème résolu pour le calcul du champ  $\delta u$  des suppressions interstitielles.

#### 6.a.5 solution du problème $\langle \mathcal{P}_a \rangle$

Soit  $f(x)$  une fonction périodique de la variable  $x$ , de période  $L$ . Il est facile de voir que la fonction  $\langle f \rangle$  est en fait indépendante de l'abscisse  $x$ . Cette propriété est en particulier assurée pour le champ  $\langle \underline{\xi}^{irr} \rangle$  qui ne dépend de ce fait que de l'ordonnée  $y$  et de l'instant  $t$ . On pose donc a priori

$$\langle \underline{\xi}^{irr} \rangle(y, t) = a(y, t) \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + b(y, t) \underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + c(y, t) \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \quad (73)$$

La recherche de la solution du problème  $\langle \mathcal{P}_a \rangle$  dans le cas général où  $\langle \underline{\xi}^{irr} \rangle$  est donné par (73) est présentée à l'Annexe 2. On se limite ici

pour simplifier l'exposé au cas où  $\langle \underline{\varepsilon}^{irr} \rangle$  est uniaxial et correspond à une densification de type "oedométrique" selon la direction parallèle à  $\underline{e}_y$ :

$$\langle \underline{\varepsilon}^{irr} \rangle(y,t) = c(y,t) \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \quad (74)$$

Il s'agit de déterminer un triplet  $(\langle \sigma'^a \rangle, \langle \xi^a \rangle, \langle u^a \rangle)$  solution des équations (72a) à (72f). On recherche a priori un tel triplet qui soit indépendant des coordonnées x et z. (72a) fournit alors :

$$\frac{\partial}{\partial y} (\langle \sigma'_{yy} \rangle - \langle u^a \rangle) = 0 \quad (75)$$

soit, en tenant compte de la condition aux limites (72e) :

$$\langle \sigma'_{yy} \rangle = \langle u^a \rangle \quad (76)$$

Puisque  $\langle \xi^a \rangle$  ne dépend que de y, il faut assurer

$$\langle \varepsilon_{xx}^a \rangle = \langle \varepsilon_{zz}^a \rangle = 0 \quad (77)$$

En utilisant (72c), (76) et (77), il vient alors successivement

$$\langle \sigma'_{xx} \rangle = \langle \sigma'_{zz} \rangle = \frac{\nu}{1-\nu} \langle \sigma'_{yy} \rangle = \frac{\nu}{1-\nu} \langle u^a \rangle \quad (78)$$

et

$$\langle \varepsilon_{yy}^a \rangle = \frac{\langle u^a \rangle}{K_v} + c \quad (79)$$

où l'on a posé

$$K_v = 3 \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} \right) K \quad (80)$$

(72) et (74) dans (67b) donnent alors

$$K_v \left( \frac{k}{\gamma} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \langle u^a \rangle - \frac{\partial c}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \langle u^a \rangle \quad (81a)$$

d'où

$$K \frac{k}{\gamma} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \langle u^a \rangle - K_v \left( \frac{\partial}{\partial t} \langle \varepsilon_v^{irr} \rangle \right) = \frac{\partial}{\partial t} \langle u^a \rangle \quad (81b)$$

On observe que  $\langle u^a \rangle$  est solution d'un problème de diffusion avec termes de sources pour lequel les conditions initiales et les conditions aux limites s'écrivent:

$$\begin{cases} \langle u^a \rangle(y, 0) = 0, \forall y \in [-h, 0] \\ \langle u^a \rangle(0, t) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y} \langle u^a \rangle(-h, t) = 0 \quad (\forall t \geq 0) \end{cases} \quad (82)$$

On retrouve donc une équation de même nature mathématique que (57). Cependant, elle porte non pas sur la surpression interstitielle générée par la houle, mais sur la moyenne sur une longueur d'onde de la contribution irréversible à cette surpression.

## 6.b exploitation du problème résolu : une estimation de $\delta u$

### 6.b.1 construction d'une simulation des contraintes réelles

Le paragraphe précédent a établi le lien fonctionnel existant entre les déformations irréversibles  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{irr}$  causées dans le massif par le chargement et la quantité  $\langle u^a \rangle$ . Si une estimation de la fonction  $c(y, t)$  peut être fournie, l'accès à la solution du problème  $\langle \mathcal{P}_a \rangle$  et en particulier à  $\langle u^a \rangle$  est ouvert. Cette estimation requiert le choix d'une simulation  $\underline{\underline{\sigma}}'^B$  des contraintes réelles  $\underline{\underline{\sigma}}'$ , selon le principe même de la méthode découplée, qui a été énoncé au paragraphe 5.a. Les développements ultérieurs de ce chapitre seront fondés sur la définition suivante de  $\underline{\underline{\sigma}}'^B$ :

$$\underline{\underline{\sigma}}'^B = \underline{\underline{\sigma}}'_0 + \underline{\underline{\sigma}}'^e + \langle \underline{\underline{\sigma}}'^a \rangle \quad (83)$$

soit encore

$$\underline{\underline{\sigma}}'^B = \underline{\underline{\sigma}}' - (\underline{\underline{\sigma}}'^a - \langle \underline{\underline{\sigma}}'^a \rangle) \quad (84)$$

L'approximation consentie en remplaçant  $\underline{\underline{\sigma}}'$  par  $\underline{\underline{\sigma}}'^B$  consiste à négliger les variations de  $\underline{\underline{\sigma}}'^a$  à l'intérieur d'une longueur d'onde. Plus précisément, la pertinence de la simulation exige que la différence  $\underline{\underline{\sigma}}'^a - \langle \underline{\underline{\sigma}}'^a \rangle$  soit négligeable devant l'amplitude des variations de  $\underline{\underline{\sigma}}'^e$ . Malheureusement il est impossible d'évaluer cette différence en dehors

de la résolution du problème aux limites qui repose sur la connaissance de la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  de (32).

La structure du champ  $\underline{\sigma}'^s$  donné par (83) invite à revenir un instant sur la nécessité énoncée au paragraphe 5.a "d'injecter du comportement" dans le choix de la simulation des contraintes réelles. Tout d'abord, la présence du terme  $\underline{\sigma}'_0$  rappelle que l'état initial n'est pas statiquement déterminé mais dépend de la rhéologie du matériau ainsi que des sollicitations subies antérieurement par le massif. Cette observation rend nécessaire une hypothèse du type (66). Le terme  $\underline{\sigma}'^e$  incorpore l'information relative aux propriétés réversibles. En effet, bien que les paramètres qui caractérisent ces dernières n'apparaissent pas explicitement dans les expressions des composantes de  $\underline{\sigma}'^e$  données en (II.106), celles-ci n'ont été établies que pour un massif poroélastique homogène, ou dans le cadre des relations (14a) et (14b).

Enfin, le terme  $\langle \underline{\sigma}'^a \rangle$  constitue le point fort du couplage entre comportement et simulation : la valeur du  $\langle u^a \rangle$  conditionne la contrainte moyenne du tenseur  $\underline{\sigma}'^s$ , dont dépend à son tour le taux de déformations volumiques irréversibles  $\langle \dot{\epsilon}_v^{irr} \rangle$ , qui intervient dans le terme de source de l'équation de diffusion dont  $\langle u^a \rangle$  est solution.

A l'approximation de  $\underline{\sigma}'$  par  $\underline{\sigma}'^s$  correspond celle de  $u^a$  par  $\langle u^a \rangle$ . Par analogie avec la formule (70) donnant la surpression  $\delta u$  générée dans le massif, on obtient une approximation  $\delta u^s$  de  $\delta u$  en posant :

$$\delta u^s = u^e + \langle u^a \rangle \quad (85)$$

Pour le calcul de stabilité qui motive la présente réflexion, l'introduction de  $\delta u^s$  revient à remplacer la sollicitation réelle par une sollicitation approchée définie par le champ de gradients hydrauliques  $\gamma_{\underline{w}} i^s$  :

$$\gamma_{\underline{w}} i^s = -\text{grad } \delta u^s \quad (86)$$

La dernière étape avant le calcul de stabilité consiste donc à donner

une méthode de calcul de  $\delta u^s$ , c'est à dire de  $\langle u^a \rangle$

#### 6.b.2 Principe du calcul de $\langle u^a \rangle$

Le calcul de  $\langle u^a \rangle$  repose sur l'estimation du taux de déformation volumique irréversible moyen  $\frac{\partial}{\partial t} \langle \varepsilon_v^{irr} \rangle$ . On fait l'hypothèse que chaque cycle élémentaire est peu intense.

Comme cela a été souligné au paragraphe 2, la connaissance expérimentale quantitative disponible sur les phénomènes anélastiques sous chargement cyclique se rapporte aux effets cumulés par cycle. A défaut d'informations plus fines sur la rhéologie du matériau, qui correspondraient à une échelle de temps inférieure à la période, on est donc astreint à remplacer  $\frac{\partial}{\partial t} \langle \varepsilon_v^{irr} \rangle$  dans (81b) par sa moyenne sur une période, soit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \varepsilon_v^{irr} \rangle \approx \frac{1}{T} \langle \Delta \varepsilon_v^{irr} \rangle \quad (87)$$

où  $\Delta \varepsilon_v^{irr}$  représente la déformation volumique irréversible cumulée sur une période. Dans le cadre de l'hypothèse du cycle élémentaire peu intense, les variations de  $\langle u^a \rangle$  au cours d'une période de la houle sont négligeables devant celles de  $\underline{\underline{\sigma}}'^e$ . Cette observation confère un sens physique simple à la simulation des contraintes réelles par  $\underline{\underline{\sigma}}'^s$ . Durant une période  $\mathcal{T}_n = [nT, (n+1)T[$ , chaque élément de sol est soumis à un cycle du chargement déviatorique défini par  $\underline{\underline{\sigma}}'^e$  à partir de l'état de contraintes "initial"  $\underline{\underline{\sigma}}'_o + \langle \underline{\underline{\sigma}}'^a \rangle$ . Par conséquent, le calcul des déformations volumiques irréversibles qui résultent d'une période peut être mené par le procédé décrit au paragraphe 2.d.2, c'est-à-dire par la formule (39). On note  $\mathcal{A}_n$  la valeur de la grandeur  $\mathcal{A}$  à la fin du cycle  $\mathcal{T}_{n-1} = [(n-1)T, nT[$  et  $(\mathcal{A})_n^{n+1}$  les variations de cette grandeur au cours du cycle ultérieur  $\mathcal{T}_n = [nT, (n+1)T[$ . Avec ces notations, il vient :



$$\left. \begin{aligned} (\sigma'_m)_n &= \sigma'_{m,0} - \frac{1}{3} \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \langle u^a \rangle_n \\ \tau_n &= \sup_{t \in \mathcal{I}_n} (I_2(\sigma'^e))^{1/2} \end{aligned} \right\} \rho_n = \tau_n / (\sigma'_m)_n \quad (88a)$$

$$(\Delta \varepsilon_v^{irr})_n^{n+1} = -\frac{\kappa}{1+e} (\rho_n^\beta) \exp((\beta-1)\varepsilon_n / \kappa) \quad (88b)$$

$$(\Delta \varepsilon)_n^{n+1} / \kappa = -(\rho_n^\beta) \exp((\beta-1)\varepsilon_n / \kappa) \quad (88c)$$

L'algorithme ainsi défini pour le calcul de  $(\Delta \varepsilon_v^{irr})_n^{n+1}$  est de type explicite. En effet, cette quantité est déterminée à partir des valeurs de  $\sigma'_m$  (et donc de  $\langle u^a \rangle$ ) et de  $\varepsilon$  à la fin du cycle précédent, c'est-à-dire au temps  $t=nT$ . Il pourrait être "implicite" par itérations.

On observera que la simulation  $\underline{\sigma}'^a$  et les informations quantitatives disponibles sur le comportement ne permettent pas de prendre en compte d'éventuelles variations de  $\Delta \varepsilon_v^{irr}$  à l'intérieur d'une longueur d'onde. L'annexe 3 fournit une justification de (87) basée sur l'hypothèse du cycle élémentaire peu intense. A l'ordre d'approximation défini par  $\underline{\sigma}'^a \approx \langle \underline{\sigma}'^a \rangle$  et compte tenu des moyens disponibles pour la prévision des effets anélastiques, elle établit que (87) n'introduit pas de simplification supplémentaire.

Par le procédé de calcul qui vient d'être décrit, la source de (81b) est approchée par une fonction en escalier (constante sur chaque période). L'algorithme de résolution de (81b) est celui de Crank-Nicolson. L'ensemble des équations (81), (82) d'une part, (87) et (88a,b,c) d'autre part permettent la détermination pas-à-pas de la quantité  $\langle u^a \rangle$ . La figure 5 propose un schéma qui résume les étapes principales de la reformulation.

Il est bon de rappeler que l'état initial du sol n'intervient dans l'algorithme proposé que par le biais de  $\sigma'_{m,0}$  et  $\varepsilon_0$ , comme on peut le

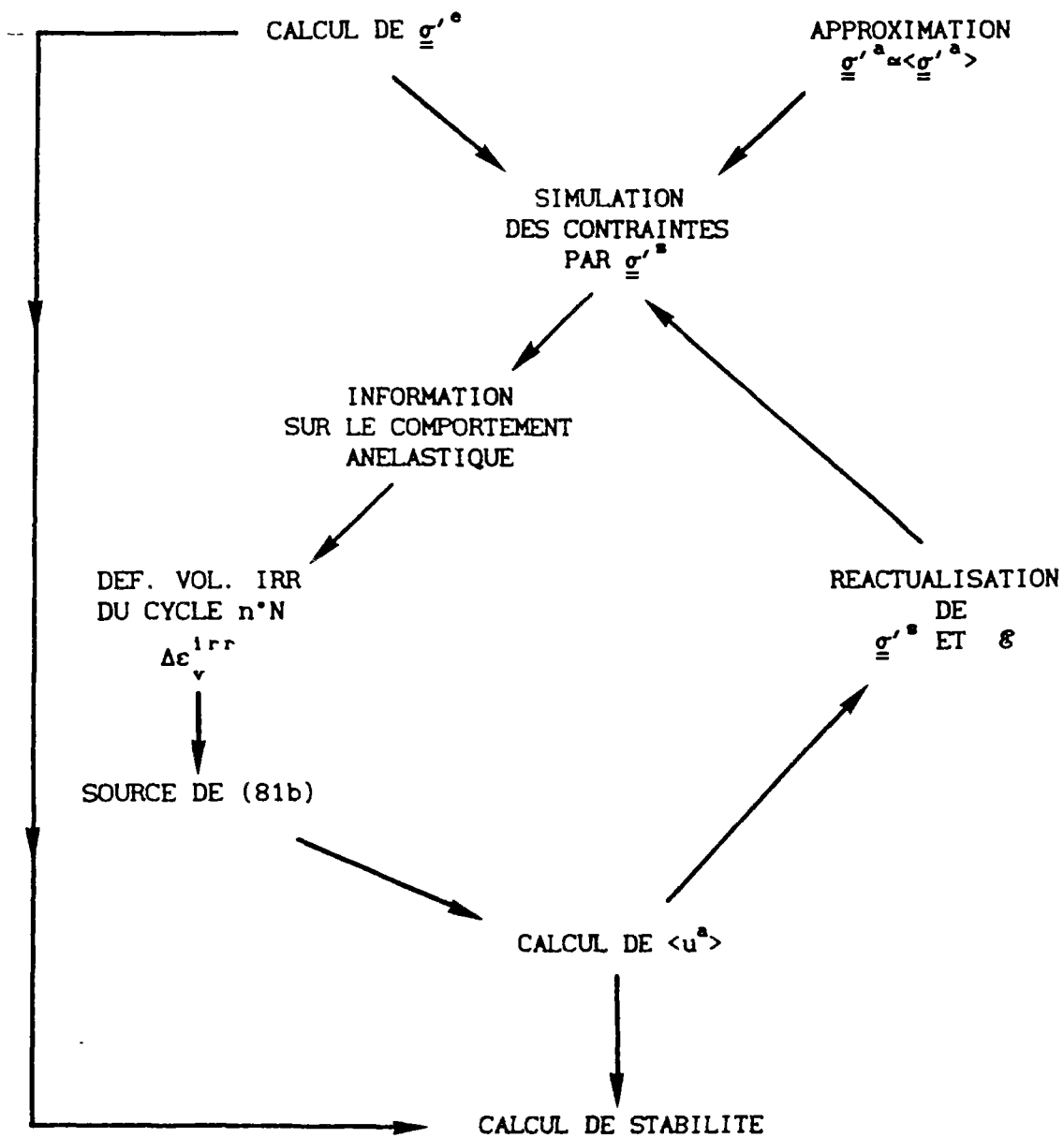


Figure 5 : Architecture de la reformulation

vérifier sur les formules (88a,b,c). En particulier, comme cela a été souligné au paragraphe 2.d.2, le modèle ne prend pas en compte une composante déviatorique éventuelle de  $\underline{\sigma}'_o$ .

### 6.b.3 variations de la source de pression

D'un cycle à l'autre, le chargement cyclique qui est défini par  $\underline{\sigma}'^o$  est inchangé. En revanche, l'état de contraintes initial du cycle, c'est-à-dire  $\underline{\sigma}'_o + \langle \underline{\sigma}'^a \rangle$ , ainsi que l'indice des vides irréversible dépendent du cycle considéré. Comme le montre (88a), l'évolution de  $\langle u^a \rangle$  modifie la contrainte effective moyenne initiale du cycle. Elle affecte donc la valeur du taux de cisaillement cyclique  $\rho$ . La densification irréversible qui s'accumule au cours des cycles est mesurée par l'indice  $\mathcal{E}$ . Les deux quantités  $\rho$  et  $\mathcal{E}$  sont présentes dans la formule (88b) qui permet ainsi de tenir compte des 2 origines des variations dans le temps du terme de source de l'équation (81). Elles doivent être réactualisées à chaque pas du calcul.

On observera que l'augmentation du taux de cisaillement cyclique ( $\rho_n$ ) et la densification irréversible ( $\mathcal{E}_n$ ) agissent *en sens inverse* sur les variations de  $\Delta \epsilon_v^{irr}$ . Par conséquent, négliger l'un ou l'autre de ces phénomènes conduit respectivement à sous-estimer ou sur-estimer la valeur de  $\langle u^a \rangle$ . Mais si l'on néglige *les deux*, on n'est pas *a priori* en mesure de se positionner par rapport à la valeur réelle de  $\langle u^a \rangle$ , c'est-à-dire de déterminer si le résultat du calcul fournit une valeur par excès ou par défaut de la grandeur recherchée. Son exploitation pour une analyse de stabilité paraît alors très délicate. On retrouve ici la critique qui avait été formulée au paragraphe 5.b à l'encontre de la méthode de Seed sur le fait de négliger les variations du terme  $\dot{u}_g$ . Le paragraphe suivant est consacré à la présentation des résultats numériques de la reformulation. Il va permettre notamment de clarifier le problème qui vient d'être soulevé.

### 6.c résultats numériques

On se propose de présenter dans ce paragraphe un certain nombre de résultats numériques typiques auxquels la réflexion qui a été développée donne accès. Il s'agit d'une part des profils de pression interstitielle "anélastique" dans le massif, et d'autre part de l'évolution en fonction du temps de la pente en  $y=0$  de ces profils, c'est-à-dire la grandeur  $\frac{\partial}{\partial y}(\langle u^a \rangle)_{|y=0}$ , dont l'importance pour le calcul de stabilité sera mis en évidence au paragraphe 7. Cette présentation est l'occasion de faire le point sur l'ensemble des paramètres nécessaires pour le calcul de la génération de pressions interstitielles, se rapportant à la géométrie, la sollicitation et les propriétés du matériau.

La *géométrie* est définie par la profondeur d'eau  $d$  et l'épaisseur  $h$  de la couche de sable. On rappelle que le toit de cette couche est plan et que sa base est au contact d'un substratum imperméable.

La *sollicitation* due à la houle a été définie par une onde de pressions progressive d'amplitude lentement variable, du type (44). Une fois données les fonctions  $p_o(.)$  et  $n(.)$ , rien ne s'oppose à la mise en oeuvre pratique de la reformulation. Toutefois, en raison du peu d'informations dont dispose le praticien sur les variations de  $p_o(.)$ , il est conduit à caractériser la houle de projet par un (ou plusieurs) bloc(s) d'un nombre fixé de cycles de caractéristiques constantes. En outre, il fait le plus souvent référence à la théorie linéaire de la houle pour laquelle  $n(.)$  est une sinusoïde. Ainsi, dans les calculs présentés ici, la sollicitation est caractérisée par une période  $T$  et une cambrure constante (par exemple, la cambrure  $H_o/L_o$  en profondeur d'eau infinie). Etant donné un couple  $(T, H_o/L_o)$ , la composante cyclique des contraintes, c'est-à-dire  $\underline{\sigma}'^e$ , dépend de l'épaisseur  $h$  de la couche de sable. Pour le calcul, on adopte les expressions (II.106) des composantes de ce tenseur, obtenues pour le cas où  $d=\infty$ . Les calculs numériques en éléments finis de Gatmiri (1989) démontrent qu'elles restent valables tant que  $L/h \leq 2$ .

Les *propriétés du matériau* auxquelles la réflexion précédente a fait

référence sont la perméabilité, l'existence de déformations réversibles et la contractance. Les deux premières interviennent dans le coefficient de consolidation  $c_v = kK_v / \gamma_w$  qui sera supposé constant dans tout le massif. On suppose de même que l'indice des vides irréversible initial est une constante  $\varepsilon_o$  dans tout le massif. La contractance est caractérisée par le coefficient  $\beta$  et le coefficient  $\alpha = a \cdot \exp((\beta-1)\varepsilon_o / \kappa)$  des formules (23) et (31). Le coefficient de Poisson  $\nu$ , le poids volumique déjaugé  $\gamma'$  et le coefficient  $K_o$  de la formule (66) doivent également être fournis.

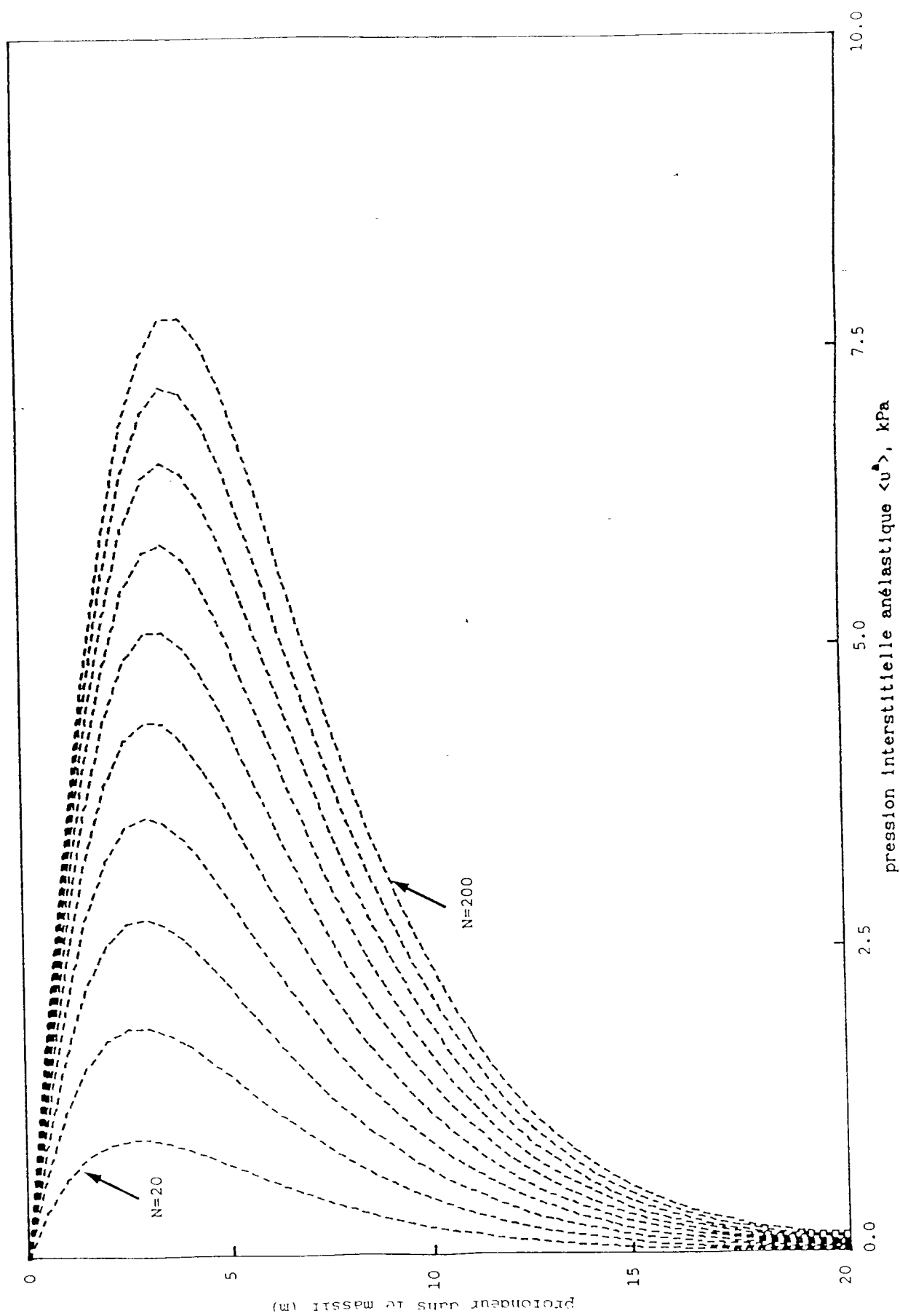
La figure 6 présente les profils de la pression interstitielle "anélastique" obtenue dans le massif pour le jeu de paramètres rassemblés dans le tableau 1. Les profils sont donnés tous les 20 cycles.

<u>matériau</u>	<u>sollicitation</u>	<u>géométrie</u>
$c_v = 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$	$H_o / L_o = 0.06$	$d = 15 \text{ m}$
$\nu = 1/3$	$T = 10 \text{ s}$	$h = 50 \text{ m}$
$K_o = 1/2$		
$\alpha = .0023$		
$\beta = 6.644$		
$\gamma' = 10 \text{ kN/m}^3$		

tableau 1

On observe tout d'abord une accumulation progressive de la pression en fonction du temps. Autrement dit, en un point donné, la pression interstitielle croît en fonction du temps. Mais il convient de noter dès maintenant que cette propriété n'est pas générale et qu'elle dépend de la durée d'observation du phénomène comme cela sera montré un peu plus tard. La nullité de la pression au toit du massif est imposée par la condition de drainage. Les très faibles valeurs calculées pour les  $|y|$  élevés s'expliquent par le fait que le taux de cisaillement cyclique qui contrôle le phénomène de contractance est amorti exponentiellement en fonction du rapport  $k_y$ , comme le montre la formule (II-122). Le profil est marqué par la présence d'un maximum

Figure 6. Profils de la pression interstitielle anélastique à l'intérieur du massif



pour une ordonnée  $y^*$ , située à faible distance du toit du massif. Pour  $y < y^*$ , les forces d'écoulement associées à  $\langle u^a \rangle$  sont orientées vers la base de la couche. Intuitivement, elles sont donc stabilisantes au sens où elles sont équivalentes à une augmentation du poids volumique déjaugé du matériau. En revanche, pour  $y > y^*$ , elles sont orientées vers le toit du massif. Elles sont donc déstabilisantes puisqu'elles diminuent le poids volumique apparent. L'allure du profil obtenu laisse donc pressentir qu'un risque d'instabilité superficielle peut accompagner le processus d'accumulation de pression. Enfin, il est utile pour la suite d'observer que la dérivée  $\frac{\partial}{\partial y} \langle u^a \rangle$  est une quantité négative et décroissante pour  $y \in [y^*, 0]$  et positive pour  $y \leq y^*$ .

On a annoncé précédemment que la valeur du gradient de la pression interstitielle en surface constitue un paramètre essentiel du profil du point de vue du calcul de stabilité qui sera effectué ultérieurement. C'est pourquoi il est intéressant d'en suivre l'évolution en fonction du temps c'est-à-dire du numéro  $N$  du cycle appliqué. On peut dès maintenant remarquer qu'elle représente, au signe près, la valeur de la force d'écoulement d'origine anélastique au toit du massif. C'est pourquoi l'on note

$$\gamma_w i^{irr}(0) = - \frac{\partial}{\partial y} \langle u^a \rangle \Big|_{y=0} \quad (89)$$

La figure 7 fournit les variations de  $\gamma_w i^{irr}(0)$  en fonction de  $N$  pour 3 valeurs différentes de la cambrure ( $H_o/L_o = 0,05; 0,06$  et  $0,07$ ), tout autre paramètre du problème étant donné par le tableau 1. On observe que  $\gamma_w i^{irr}(0)$  est une fonction sensiblement croissante du paramètre cambrure. Ceci s'explique aisément par le fait que l'amplitude du cisaillement cyclique varie dans le même sens que la cambrure.

Selon le même principe, la figure 8 présente la relation  $\gamma_w i^{irr}(0) \equiv N$  pour 3 valeurs du coefficient de consolidation ( $c_v = 10^{-3}, 10^{-2}$  et  $10^{-1} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ). Comme on pouvait s'y attendre, à sollicitation donnée,  $\gamma_w i^{irr}(0)$  est une fonction très sensiblement décroissante du

coefficient  $c_v$ .

La figure 9 présente la comparaison entre l'évolution de  $\gamma_w^{irr}(0)$  prévue en négligeant les variations du terme de source de pression, et celle que fournit la reformulation. On observe que les 2 courbes sont tangentes l'une à l'autre à l'origine et restent voisines pour les faibles valeurs de  $N$ . Ceci s'explique par le fait que les variations de l'indice des vides irréversible et du taux de cisaillement cyclique, c'est-à-dire des 2 paramètres qui contrôlent la valeur de  $K_{\Delta \epsilon_v^{irr}}/T$ , sont peu significatives sur un chargement de "courte" durée. En revanche, lorsque celui-ci se prolonge, une différence sensible de comportement apparaît. A terme de source constant, la croissance de  $\gamma_w^{irr}(0)$  ne présente pas de ralentissement sensible sur la durée considérée. Au contraire, lorsque l'on prend en compte les variations du terme de source,  $\gamma_w^{irr}(0)$  atteint un palier pour  $N=400$ . A cet instant, l'écart relatif entre les 2 estimations de  $\gamma_w^{irr}(0)$  est de l'ordre de 60% .

Il est intéressant d'examiner l'évolution ultérieure de  $\gamma_w^{irr}(0)$ , c'est-à-dire après ce palier. La figure 10 présente les résultats du calcul jusqu'à  $N=2400$ , en tenant compte des variations du terme de source. Contrairement à l'évolution monotone croissante prévue par un calcul à terme de source constant, on observe une décroissance progressive du niveau de surpression interstitielle. Ce phénomène doit être attribué à la densification irréversible du matériau. Pour  $N=2400$ , le rapport entre les 2 calculs de  $\gamma_w^{irr}(0)$  est de l'ordre de 5.

En conclusion, la simplification qui consiste à négliger les variations de  $u$  ne peut être retenue car elle conduit à une estimation largement excessive de la surpression d'origine anélastique.

#### 6.d extension du calcul à un massif faiblement incliné

La périodicité spatiale du champ  $\underline{\epsilon}^{irr}$  constitue l'argument essentiel



Figure 7. Effet de la cambrure sur l'évolution du gradient hydraulique irréversible

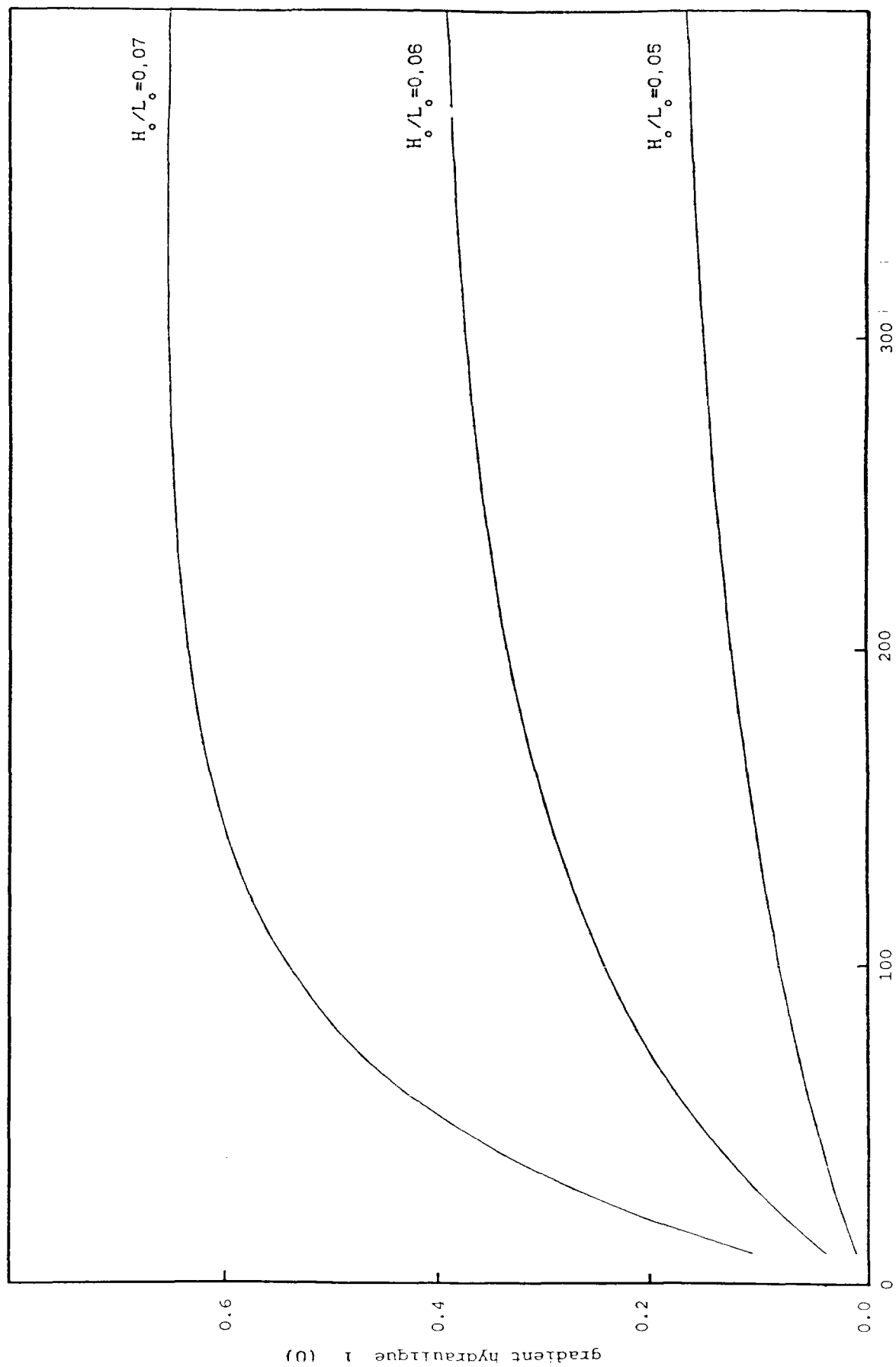


Figure 8. Effet du coefficient de consolidation sur l'évolution du gradient hydraulique irréversible

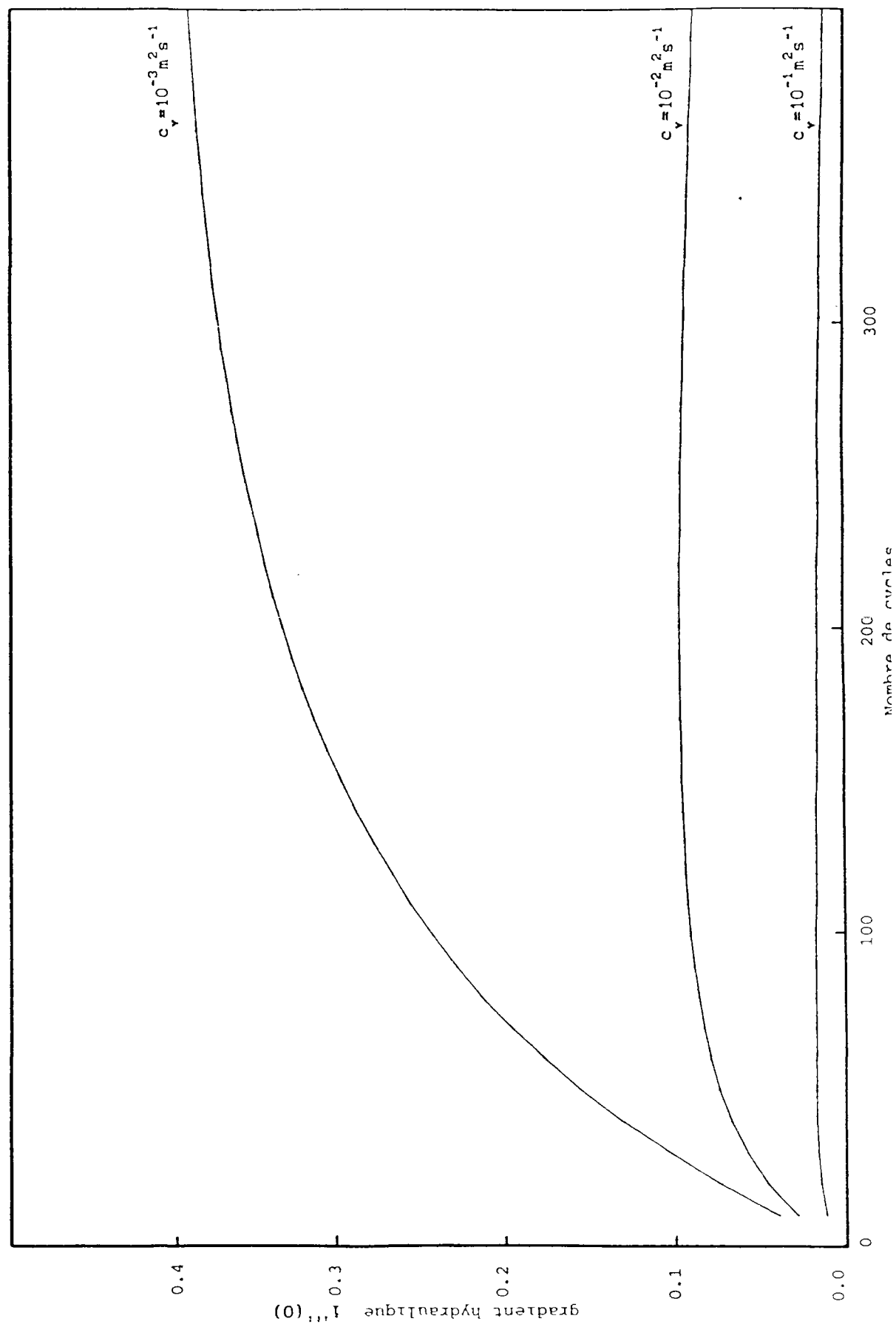


Figure 9. Effet des variations du terme de source de l'équation de diffusion

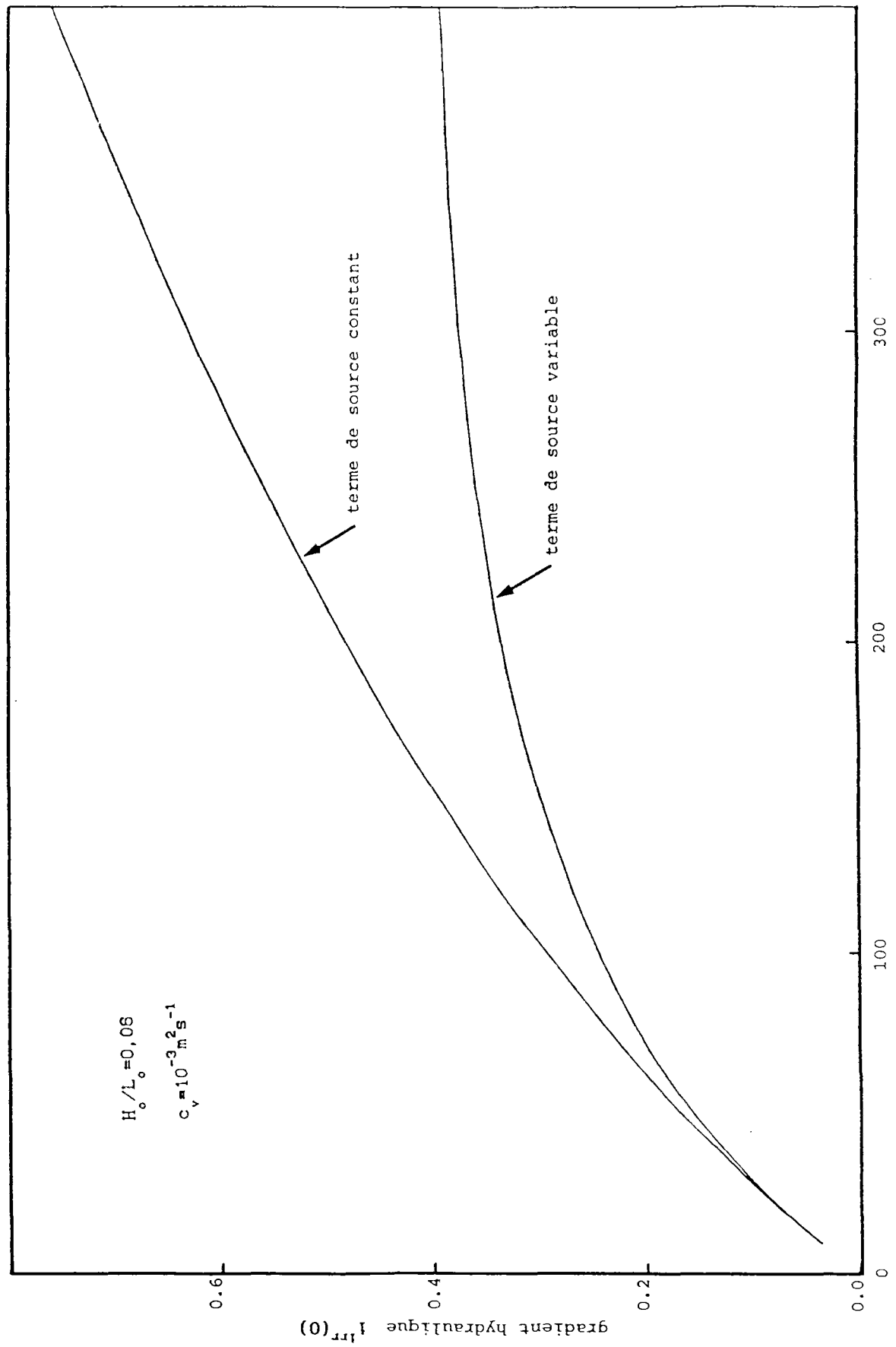
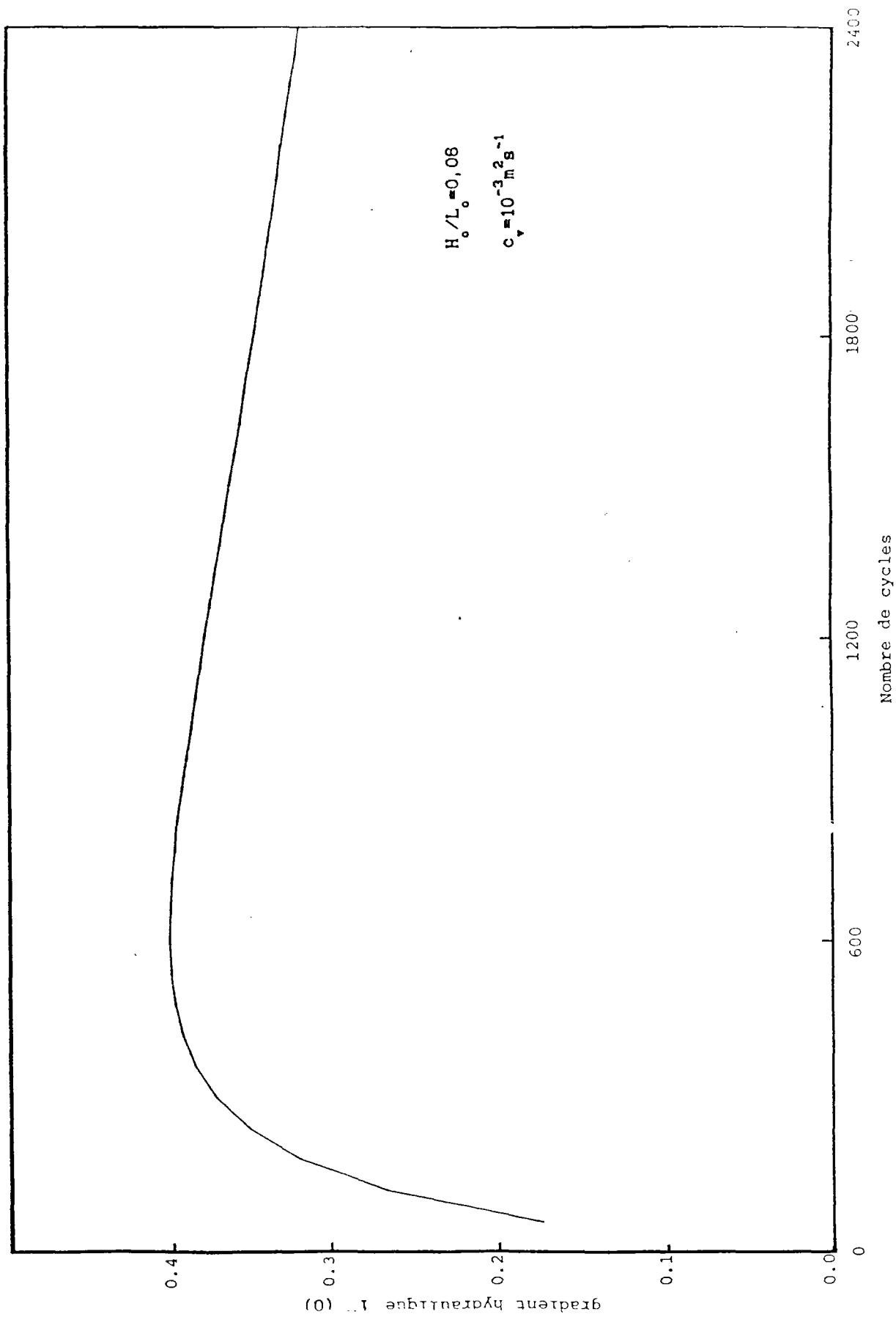


Figure 10. Phases croissante et décroissante dans l'évolution du gradient hydraulique irréversible



pour l'introduction et la résolution du problème  $\langle \mathcal{P}_a \rangle$ . Cette propriété repose en particulier sur celle du champ  $p_h(x,t)$  des surpressions de la houle. Cependant, dans le cas d'un fond marin incliné, les variations de la profondeur d'eau affectent les valeurs prises par la hauteur des vagues et la longueur d'onde. La surpression  $p_h(x,t)$  est non périodique et peut être calculée comme au paragraphe (2.1) du Chapitre I. Le procédé de calcul des surpressions interstitielles dans le massif qui vient d'être décrit doit donc en toute rigueur être réservé au cas d'un fond marin horizontal.

Toutefois, on peut espérer que le procédé en question reste acceptable dans le cas des fonds marins faiblement inclinés. On se limite donc à la théorie de la houle linéaire et l'on considère une houle de projet définie au large par la période  $T$  et la hauteur de vagues  $H_0$ . Pour une profondeur d'eau  $d_0$  donnée, on introduit l'onde progressive sinusoïdale  $\tilde{p}_h$  définie à partir de l'amplitude  $p_0(d_0)$  et le nombre d'onde  $k(d_0)$  de l'onde "réelle" de la manière suivante :

$$\tilde{p}_h(x,t) = p_0(d_0) \sin(k(d_0)x - \omega t) \quad (90)$$

Au voisinage de la profondeur d'eau  $d_0$ ,  $\tilde{p}_h$  constitue une bonne approximation de  $p_h$ . En invoquant un argument de continuité de la réponse du matériau par rapport à la sollicitation (pour des topologies à préciser...), on admettra que les déformations irréversibles et les surpressions interstitielles générées par  $\tilde{p}_h$  constituent une approximation de celles correspondant à  $p_h$ .

Pour le fond horizontal, la méthode de calcul des surpressions interstitielles générées par la houle dans le massif fait appel à l'approximation qui consiste à négliger les variations de  $\underline{\sigma}'^a$  au sein d'une longueur d'onde. Dans le cas du fond incliné, une approximation supplémentaire, située en amont de la précédente, est introduite en remplaçant l'onde "réelle"  $p_h$  par l'onde  $\tilde{p}_h$ . Il convient donc de noter  $\delta u^{\alpha s}$  l'estimation des surpressions interstitielles "réelles" dans le domaine  $\Omega_d$ , afin de rappeler par les symboles " $\alpha$ " et " $s$ " les deux

niveaux successifs d'approximation qui sont consentis.

A défaut de pouvoir caractériser par le procédé qui vient d'être développé les forces d'écoulement *dans l'ensemble du massif*, seule une analyse *locale* de la stabilité est possible. Le procédé en question n'est donc pas en mesure de fournir de condition suffisante de stabilité pour le massif soumis à la sollicitation "réelle". En revanche, des conditions nécessaires pour cette stabilité pourront être obtenues en s'appuyant sur l'approximation de la sollicitation "réelle" définie au moyen de  $\tilde{p}_h$ .

Plus précisément, pour chaque valeur  $d$  de la profondeur d'eau elles peuvent être établies à partir du théorème cinématique du Calcul à la Rupture appliqué à des champs de vitesses virtuelles à support dans  $\Omega_d$ . Cette idée est développée au paragraphe 7.

## 7 - CALCUL DE STABILITE EN CONTRAINTES EFFECTIVES

### 7.a idée du calcul de stabilité

Le paragraphe 6 a proposé une méthode de calcul pour la pression interstitielle qui se développe dans le massif sous-marin sous l'action de la houle. Au passage, une simulation  $\underline{\sigma}'^s$  des contraintes réelles a été introduite (équation (83)). La première idée pour un calcul de stabilité consiste à exploiter celle-ci en concluant à la stabilité du massif aussi longtemps que le champ  $\underline{\sigma}'^s$  reste compatible en tout point avec les capacités de résistance du matériau. On obtiendrait par ce procédé une condition suffisante de stabilité. Toutefois, la mise en oeuvre de cette idée nécessite la connaissance complète du champ  $\underline{\sigma}'_o$ . En revanche, la méthode de calcul des pressions interstitielles (et donc des forces d'écoulement) dues à la houle qui a été développée ne requiert, au sujet de  $\underline{\sigma}'_o$ , que la donnée du coefficient  $K_o$  de la relation (66), auquel on peut espérer accéder par des essais in-situ. Les forces extérieures auxquelles est soumis le massif sont alors complètement déterminées (aux approximations consenties au paragraphe 6 près). C'est la force du Calcul à la Rupture de permettre à ce stade une analyse de stabilité indépendamment de la connaissance de l'état de contraintes initial. Il constitue à ce titre l'outil de base de ce paragraphe 7.

### 7.b position du problème

On considère un massif sous-marin dont le toit est un plan incliné de l'angle  $\chi$  sur la direction horizontale (figure 11). Etant donnée une houle de projet définie au large, on s'intéresse à la stabilité locale de ce massif au voisinage de la profondeur d'eau  $d$  au cours d'un cycle complet de chargement. Les capacités de résistance du matériau constitutif sont supposées homogènes dans le massif. Elles sont modélisées en contraintes effectives par le critère de Coulomb sans cohésion, caractérisé par l'angle de frottement interne  $\varphi$  dont on supposera qu'il est inférieur à  $\pi/4$ .

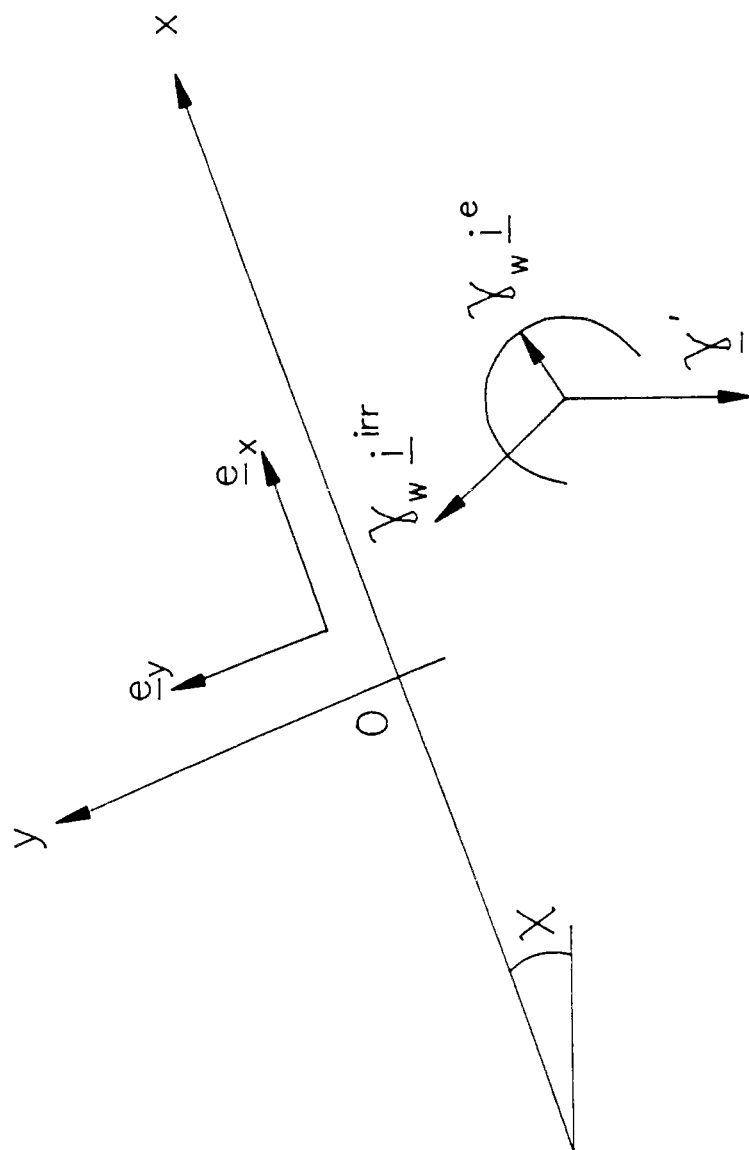


Figure 11. Les 3 composantes de la densité volumique des efforts extérieurs



Sur le plan pratique, l'étude de la stabilité locale du massif au voisinage de la profondeur  $d$  vis-à-vis de la sollicitation "réelle" passe par l'étude de la stabilité de l'ensemble du massif sous l'action de la sollicitation approchée définie par l'onde  $\tilde{p}_h$  de (90). Dans ce nouveau problème, le chargement est caractérisé, par les forces volumiques de pesanteur  $-\gamma' \underline{k}$  et par les forces volumiques d'écoulement  $\gamma \underline{i}$  associées aux surpressions  $\delta \tilde{u}^s$  qui correspondent à  $\tilde{p}$ . Le toit du massif est libre de contraintes. En exploitant (86) et la définition (85) de  $\delta \tilde{u}^s$ , il est naturel d'introduire les vecteurs  $\gamma \underline{i}^e$  et  $\gamma \underline{i}^{irr}$  suivants :

$$\gamma \underline{i}^e = -\text{grad } \tilde{u}^e \quad (91)$$

$$\gamma \underline{i}^{irr} = -\text{grad } \langle \tilde{u}^a \rangle$$

où les notations  $\tilde{u}^e$  et  $\tilde{u}^a$  représentent les champs de pressions interstitielles intervenant dans la solution des problèmes  $(\mathcal{P}_e)$  et  $(\mathcal{P}_a)$  relatifs à  $\tilde{p}_h$ . On vérifie sans difficulté à partir de la formule (II.121) donnant  $\tilde{u}^e$  (Chapitre II) que  $\gamma \underline{i}^e$  est un vecteur d'amplitude  $A(y)$  égale à  $k(d)p_0(d)e^{k(d)y}$  tournant dans le plan  $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$  à la vitesse angulaire  $\omega$  :

$$\begin{aligned} \gamma \underline{i}^e &= -k(d)p_0(d)e^{k(d)y}(\underline{e}_x \cos \psi + \underline{e}_y \sin \psi) \\ \psi &= k(d)x - \omega t \end{aligned} \quad (92)$$

Le champ de pression interstitielle  $\langle \tilde{u}^a \rangle$  est indépendant de l'abscisse  $x$ . Il en résulte que le vecteur  $\underline{i}^{irr}$  est parallèle à  $\underline{e}_y$ . Son amplitude est déterminée par la résolution du problème de diffusion défini par les équations (81) et (82). On pose

$$\underline{i}^{irr} = i^{irr}(y, t) \underline{e}_y \quad (93)$$

Les variations de  $i^{irr}$  sur une période sont négligeables devant celles de  $\underline{i}^e$ . L'argument  $t$  dans (93) pourra donc être omis pour l'étude de la stabilité au cours d'un cycle donné du chargement. La figure 11 représente la superposition des trois composantes de la densité volumique de forces à laquelle est soumis le massif.

Les calculs numériques présentés au paragraphe 6.c conduisent à se limiter à l'étude des chargements pour lesquels la fonction  $i^{irr}$  possède les propriétés suivantes :

(j) il existe un réel  $y^* < 0$  tel que :

$$(\forall y < y^*) i^{irr}(y) \leq 0 ; (\forall y \geq y^*) i^{irr}(y) \geq 0$$

$i^{irr}$  est une fonction croissante sur le segment  $[y^*, 0]$

$$(jj) (\forall y \leq 0) \int_y^0 i^{irr}(\alpha) d\alpha \geq 0$$

On observera que la signification physique de l'intégrale ci-dessus n'est autre que la quantité  $\langle \tilde{u}^a \rangle / \gamma_w$ . Les hypothèses (j) et (jj) sont adoptées pour la suite. La stabilité potentielle du massif sous l'action de la densité volumique de forces extérieures représentée à la figure 11 va être analysée au moyen du Calcul à la Rupture en déformations planes. Elle comporte une approche cinématique et une approche statique.

### 7.c approche cinématique

On considère la famille des champs de vitesses  $v^{\alpha\beta l}$  à 3 paramètres géométriques  $\alpha, \beta$  et  $l$  définis sur la figure 12. Le bloc ABC est en translation à la vitesse  $\underline{U}$ . Dans le reste du massif, la vitesse virtuelle est nulle. Les segments AC et BC constituent les lignes de discontinuité d'un tel champ de vitesses. A priori, les valeurs des paramètres  $\beta$  et  $l$  ne sont assujettis à aucune restriction. En revanche, l'angle  $\alpha$  est soumis à la condition géométrique

$$\alpha \in ]-\frac{\pi}{2} + \chi, \chi] \quad (94)$$

Toutefois, on observera que l'intérêt du mécanisme  $v^{\alpha\beta l}$  pour l'étude de la stabilité du massif soumis à l'onde "réelle" requiert que le triangle ABC soit contenu dans le domaine  $\Omega_d$ . On calcule successivement la puissance résistante maximale  $P(v^{\alpha\beta l})$  et la puissance des forces extérieures  $\mathcal{P}_{ext}$  dans un champ de vitesses  $v^{\alpha\beta l}$ .

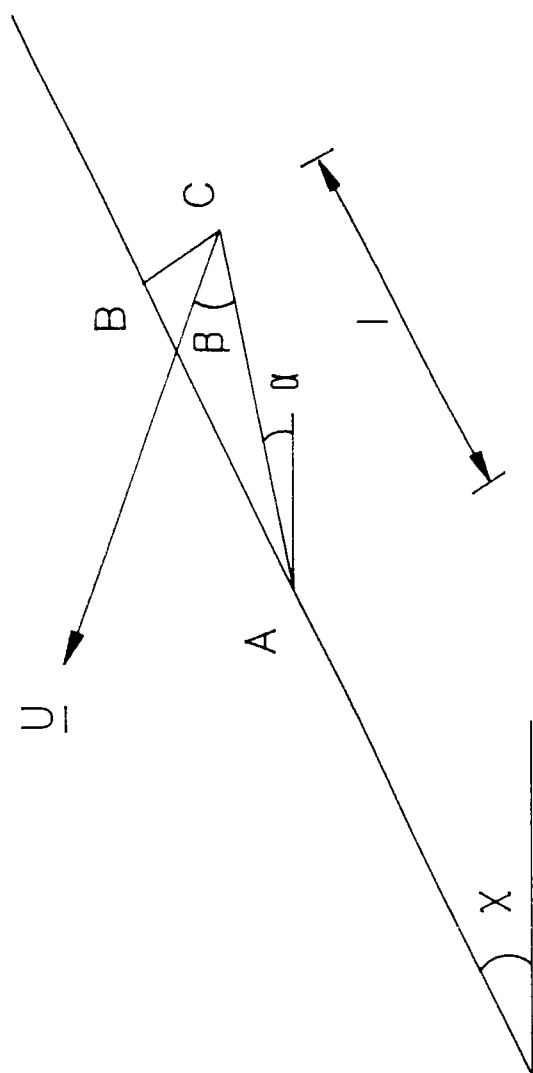


Figure 12. Mécanisme de bloc à 3 paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $l$

*puissance résistante maximale*

Par définition, on a

$$P(V^{\alpha\beta}) = \int_{AC} \pi(\underline{n}, \underline{U}) dl + \int_{BC} \pi(\underline{n}, \underline{U}) dl \quad (95)$$

où le vecteur  $\underline{n}$  désigne dans chacune des 2 intégrales de (95) un vecteur unitaire normal respectivement aux segments AC et BC. Pour le matériau de Coulomb sans cohésion, le calcul de la fonction  $\pi(\underline{n}, \underline{U})$  donne

$$\begin{aligned} \pi(\underline{n}, \underline{U}) &= +\infty \text{ si } \underline{U} \cdot \underline{n} \leq U \sin \varphi \\ \pi(\underline{n}, \underline{U}) &= 0 \text{ si } \underline{U} \cdot \underline{n} \geq U \sin \varphi \end{aligned} \quad (96)$$

L'approche cinématique ne fournira de résultats non triviaux que si la fonction  $\pi(\underline{n}, \underline{U})$  reste finie sur les deux segments AC et BC. On est donc amené à imposer les conditions supplémentaires suivantes à  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$\begin{aligned} \varphi \leq \beta \leq \pi - \varphi \\ -\frac{\pi}{2} + \varphi \leq \beta + \chi - \alpha \leq \frac{\pi}{2} - \varphi \end{aligned} \quad (97)$$

En observant que  $\alpha \leq \chi$ , on vérifie aisément que ces 2 doubles inégalités se résument à la suivante :

$$\varphi \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} - \varphi + \alpha - \chi \quad (98)$$

On note  $\mathcal{D}$  le domaine du plan  $(\alpha, \beta)$  défini par les conditions (94) et (97). On vérifie que ce domaine n'est jamais vide puisque le couple  $(\chi, \varphi)$  répond à la question. Le théorème cinématique livre alors immédiatement une famille de conditions nécessaires de stabilité sous la forme suivante :

$$(\forall (\alpha, \beta) \in \mathcal{D}) (\forall l \geq 0) \quad \mathcal{P}_{\text{ext}} \leq 0 \quad (99)$$

*puissance des forces extérieures*

La quantité  $\mathcal{P}_{\text{ext}}$  est somme des contributions de chacune des trois composantes de la densité volumique des forces extérieures :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = \int_{ABC} (-\gamma' \underline{k} + \gamma_w \underline{i}^{rr} + \gamma_w \underline{i}^o) \cdot \underline{U} \, dS \quad (100)$$

Notant  $S$  la surface du triangle  $ABC$  qui vaut  $\frac{1}{2}l^2 \text{tg}(\chi-\alpha)$ , il vient encore

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = US \left\{ \gamma' \sin(\alpha-\beta) + \gamma_w \sin(\beta+\chi-\alpha) \cdot \frac{1}{S} \int_{ABC} i^{irr} dS - \frac{1}{S} \int_{ABC} A(y) \cos(\psi+\beta+\chi-\alpha) dS \right\} \quad (101)$$

On note  $i_{\alpha l}^{irr}$  la moyenne intégrale de  $i^{irr}$  sur l'aire  $ABC$  c'est-à-dire

$$i_{\alpha l}^{irr} = \frac{1}{S} \int_{ABC} i^{irr} dS \quad (102)$$

Pour chaque valeur de  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{D}$  et de  $l$ , on obtient donc en associant (99) et (101) une condition nécessaire de stabilité sous la forme

$$(\forall \psi \in [0, 2\pi]) \gamma_w \sin(\beta+\chi-\alpha) i_{\alpha l}^{irr} \leq \frac{1}{S} \int_{ABC} A(y) \cos(\psi+\beta+\chi-\alpha) dS + \gamma' \sin(\beta-\alpha) \quad (103)$$

Considérant alors  $\gamma'$  et  $A(\cdot)$  comme des données, on se propose d'extraire de cette famille d'inégalités la condition la plus restrictive à vérifier par la fonction  $i^{irr}(\cdot)$ . Respectivement d'après (jj) et (98), il est facile de voir que les scalaires  $i^{irr}$  et  $\sin(\beta+\chi-\alpha)$  sont positifs. Il s'agit d'optimiser le choix du réel  $l$ . On obtient sans difficulté la majoration suivante :

$$(\forall \psi \in [0, 2\pi]) \frac{1}{S} \int_{ABC} A(y) \cos(\psi+\beta+\chi-\alpha) dS \geq -A(0) = \inf_{\psi} \left( \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{S} \int_{ABC} A(y) \cos(\psi+\beta+\chi-\alpha) dS \right) \quad (104)$$

La valeur de  $\psi$  réalisant le minimum n'est autre que  $\pi+\alpha-\beta-\chi$ , pour laquelle le vecteur  $\underline{i}^e$  est parallèle à  $\underline{U}$ . Utilisée dans (103), (104) fournit

$$\gamma_w \sin(\beta+\chi-\alpha) \cdot \lim_{l \rightarrow 0} i_{\alpha l}^{irr} \leq \gamma' \sin(\beta-\alpha) - A(0) \quad (105)$$

Par ailleurs, sous les hypothèses formulées au paragraphe précédent sur la fonction  $i^{irr}(\cdot)$ , on démontre à l'Annexe 4 que  $i_{\alpha l}^{irr}$  est, à  $\alpha$  fixé, une fonction décroissante de  $l$ . On a donc

$$(\forall l \geq 0) i_{\alpha l}^{irr} \leq \lim_{l \rightarrow 0} i_{\alpha l}^{irr} = i^{irr}(0) \quad (106)$$

En associant (105) et (106), il est facile de voir que la condition la

plus restrictive contenue dans la famille d'inégalités (103) lorsque  $l$  varie sur la fonction  $i^{irr}(\cdot)$  porte en fait sur  $i^{irr}(0)$  et prend la forme suivante :

$$i^{irr}(0) \leq \frac{\gamma' \sin(\beta - \alpha) - A(0)}{\gamma \sin(\beta + \chi - \alpha)} \quad (107)$$

Il reste à optimiser le choix des angles  $\alpha$  et  $\beta$ . On observe que le membre de droite est une fonction croissante du scalaire  $\beta - \alpha$ . Le choix optimal correspond donc à  $\beta = \varphi$  et  $\alpha = \chi$ . Il vient

$$\gamma_w i^{irr}(0) \leq \gamma' \left[ \frac{\sin(\varphi - \chi) - k(d) p_o(d) / \gamma'}{\sin \varphi} \right] \quad (108)$$

#### 7.d approche statique

Pour un sable, une condition suffisante de stabilité potentielle ne permet pas a priori d'espérer la stabilité elle-même. Cette observation ôte pour ce matériau une partie de sa force à l'approche statique du Calcul à la Rupture. Celle-ci doit alors être considérée comme le moyen de tester la qualité des conditions nécessaires établies par l'approche cinématique. C'est dans cet esprit que l'approche statique va être maintenant développée.

On introduit 3 champs de tenseurs de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}'_1, \underline{\underline{\sigma}}'_2$  et  $\underline{\underline{\sigma}}'_3$  pour équilibrer chacune des 3 composantes de la densité volumique des forces extérieures. Ils sont définis par leur matrice dans la base  $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$  :

$$\text{pour } -\gamma' \underline{k} : \quad \hat{\underline{\underline{\sigma}}}'_1 = \gamma' y \begin{bmatrix} K_1(y) & \sin \chi \\ \sin \chi & \cos \chi \end{bmatrix} \quad (109a)$$

$$\text{pour } \gamma_w \underline{i}^{irr} : \quad \hat{\underline{\underline{\sigma}}}'_2 = \gamma' y \begin{bmatrix} K_2(y) & 0 \\ 0 & Q(y) \end{bmatrix} \quad \text{avec } Q(y) = \frac{\gamma_w}{\gamma'} \cdot \frac{1}{y} \int_y^0 i^{irr}(\alpha) d\alpha \quad (109b)$$

$$\text{pour } \gamma_w \underline{i}^e : \quad \hat{\underline{\underline{\sigma}}}'_3 = \gamma A(y) \begin{bmatrix} -\sin \psi & \cos \psi \\ \cos \psi & \sin \psi \end{bmatrix} \quad \text{avec } \psi = kx - \omega t \quad (109c)$$

Le choix des fonctions  $K_1$  et  $K_2$  est arbitraire. En superposant les 3 champs précédents, on obtient un champ de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}'$  vérifiant les

conditions aux limites sur le toit du massif et équilibrant les forces volumiques  $\gamma \underline{i}_w^e + \gamma \underline{i}_w^{irr} - \gamma' \underline{k}$ . Sa matrice dans la base  $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$  est la suivante :

$$\hat{\underline{\sigma}}' = \gamma' y \begin{pmatrix} K(y) - \frac{A(y)}{\gamma'} \sin \psi & \sin \chi + \frac{A(y)}{\gamma'} \cos \psi \\ \sin \chi + \frac{A(y)}{\gamma'} \cos \psi & X(y) + \frac{A(y)}{\gamma'} \sin \psi \end{pmatrix} \quad (110)$$

où l'on a posé

$$X(y) = \cos \chi + Q(y) \quad (111)$$

On considère à nouveau  $\gamma'$  et  $A(\cdot)$  comme des données. IL s'agit de rechercher à quelle condition sur la fonction  $i^{irr}(y)$ , un champ de contraintes du type (110) compatible en tout point du massif avec les capacités de résistance définies par  $\varphi$  peut être exhibé. Cette compatibilité s'exprime par :

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \leq 0) \{(\sigma'_{xx} - \sigma'_{yy})^2 + 4\sigma'^2_{xy}\}^{1/2} \leq -(\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy}) \sin \varphi \quad (112)$$

La construction d'un tel champ  $\underline{\sigma}'$  repose sur l'existence d'une fonction  $K(y)$  vérifiant

$$(\forall y \leq 0)(\forall \psi) \sqrt{(K - X - 2\frac{A}{\gamma'} \sin \psi)^2 + 4(\sin \chi + \frac{A}{\gamma'} \cos \psi)^2} \leq (K + X) \sin \varphi \quad (113)$$

A  $y$  fixé, la valeur maximale du membre de gauche de (113) est atteinte lorsque

$$\cos \psi = \frac{2 \sin \chi}{(4 \sin^2 \chi + (K - X)^2)^{1/2}} \quad \sin \psi = -\frac{K - X}{(4 \sin^2 \chi + (K - X)^2)^{1/2}} \quad (114)$$

La condition (113) à vérifier par la fonction  $K(y)$  peut donc être simplifiée sous la forme suivante :

$$(\forall y \leq 0) \sqrt{(K - X)^2 + 4 \sin^2 \chi} + 2\frac{A}{\gamma'} \leq (K + X) \sin \varphi \quad (115)$$

On pose encore

$$X'(y) = X(y) - \frac{A(y)}{\gamma' \sin \varphi} \quad (116)$$

L'existence d'une fonction  $K(y)$  vérifiant (115) est équivalente à celle d'une fonction  $K'(y)$  vérifiant

$$(\forall y \leq 0) \quad \sqrt{(K' - X')^2 + 4\sin^2 \chi} + 2\frac{A}{\gamma'} \leq (K' + X')\sin \varphi \quad (117)$$

En effet, il suffit de relier  $K$  et  $K'$  par la relation  $K'(y) = K(y) - \frac{A(y)}{\gamma' \sin \varphi}$ . (117) impose, sans que cela soit suffisant, que :

$$(\forall y \leq 0) \quad K'^2 \cos^2 \varphi - 2K'X'(1 + \sin^2 \varphi) + X'^2 \cos^2 \varphi + 4\sin^2 \chi \leq 0 \quad (118)$$

où l'argument  $y$  a été omis pour simplifier. L'existence d'un réel  $K'$  vérifiant, à  $X'$  donné, l'inégalité ci-dessus est assurée si et seulement si le discriminant du trinôme en  $K'$  du membre de gauche est positif, soit :

$$X'(y) \geq \frac{\sin \chi}{\operatorname{tg} \varphi} \quad (119a)$$

( $\forall y \leq 0$ ) ou

$$X'(y) \leq -\frac{\sin \chi}{\operatorname{tg} \varphi} \quad (119b)$$

Si  $X'(y)$  est négatif, il est facile de voir que (117) ne peut être vérifiée. En revanche, si  $X'(y)$  vérifie (119a), alors les deux racines du trinôme de (118) sont positives et l'existence d'un scalaire  $K'(y)$  solution de l'inéquation de (117) est assurée. Ainsi, sous (119b), un champ de contraintes  $\underline{\sigma}'$  du type (110) compatible avec les capacités de résistance définies par  $\varphi$  peut être construit. Il s'agit donc d'une condition suffisante pour la stabilité potentielle du massif. En utilisant (111) et (116), (119b) prend encore la forme suivante :

$$(\forall y \leq 0) \quad \frac{1}{y} \int_0^y i^{irr}(\alpha) d\alpha \leq \frac{\gamma'}{\gamma_w} \frac{\sin(\varphi - \chi) - k(d)p_o(d)e^{k(d)y/\gamma'}}{\sin \varphi} \quad (120)$$

Sous les conditions imposées à la fonction  $i^{irr}(\cdot)$  au paragraphe 7.b, on démontre à l'Annexe 4 que la valeur maximale de l'intégrale de (120) est atteinte pour  $y=0$ . Il est alors facile de vérifier que (120) est équivalente à l'inégalité (108). Cette dernière constitue une *condition nécessaire et suffisante pour la stabilité potentielle du massif sous  $\tilde{p}_h$* . L'approche statique qui vient d'être développée permet donc de conclure que l'inégalité (108) représente la *condition nécessaire de stabilité la plus restrictive* que puisse fournir



l'approche cinématique.

## 7.e paramètres et trajets de chargement

Il est intéressant de réarranger (108) pour donner un rôle symétrique aux 2 contributions à la densité volumique de forces d'écoulement :

$$\left[ (\gamma_w / \gamma') \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin(\varphi - \chi)} \right] \cdot i^{irr}(0) + \left[ \frac{1}{\sin(\varphi - \chi)} \right] \cdot k(d)p_o(d) / \gamma' \leq 1 \quad (121)$$

(121) fait apparaître clairement 2 paramètres quantifiant l'intensité du chargement auquel est soumis le massif. Le paramètre  $Q_1 = k(d)p_o(d) / \gamma'$  constitue une mesure *directe* de l'intensité du chargement. Le paramètre  $Q_2 = i^{irr}(0)$  rend compte des déformations volumiques irréversibles causées par le chargement. Il mesure donc *indirectement* l'intensité du chargement au sens où il quantifie le couplage chargement-comportement. Le domaine K des valeurs potentiellement supportables de ces 2 paramètres est le triangle représenté à la figure 13. Il s'agit maintenant d'interpréter physiquement le résultat obtenu. On pose donc

$$i^{cr} = \frac{\gamma' \sin(\varphi - \chi)}{\gamma_w \sin \varphi} \quad (122)$$

Cette quantité apparaît comme la valeur potentiellement supportable extrême d'un gradient hydraulique perpendiculaire à la pente et orienté vers le toit du massif. Elle constitue une généralisation du gradient hydraulique critique  $\gamma' / \gamma_w$  introduit classiquement en Mécanique des Sols pour l'étude du phénomène de renard. Elle prend en compte l'effet défavorable de l'inclinaison du massif. Cependant, dans le chargement de la houle, se superposent aux forces d'écoulement perpendiculaires à la pente des forces d'écoulement de direction variable. L'instabilité peut donc apparaître *cycliquement* dès lors que le point représentatif du chargement dans le plan  $(Q_1, Q_2)$  atteint la frontière de K, même si  $i^{irr}(0)$  est situé en deçà du gradient critique.

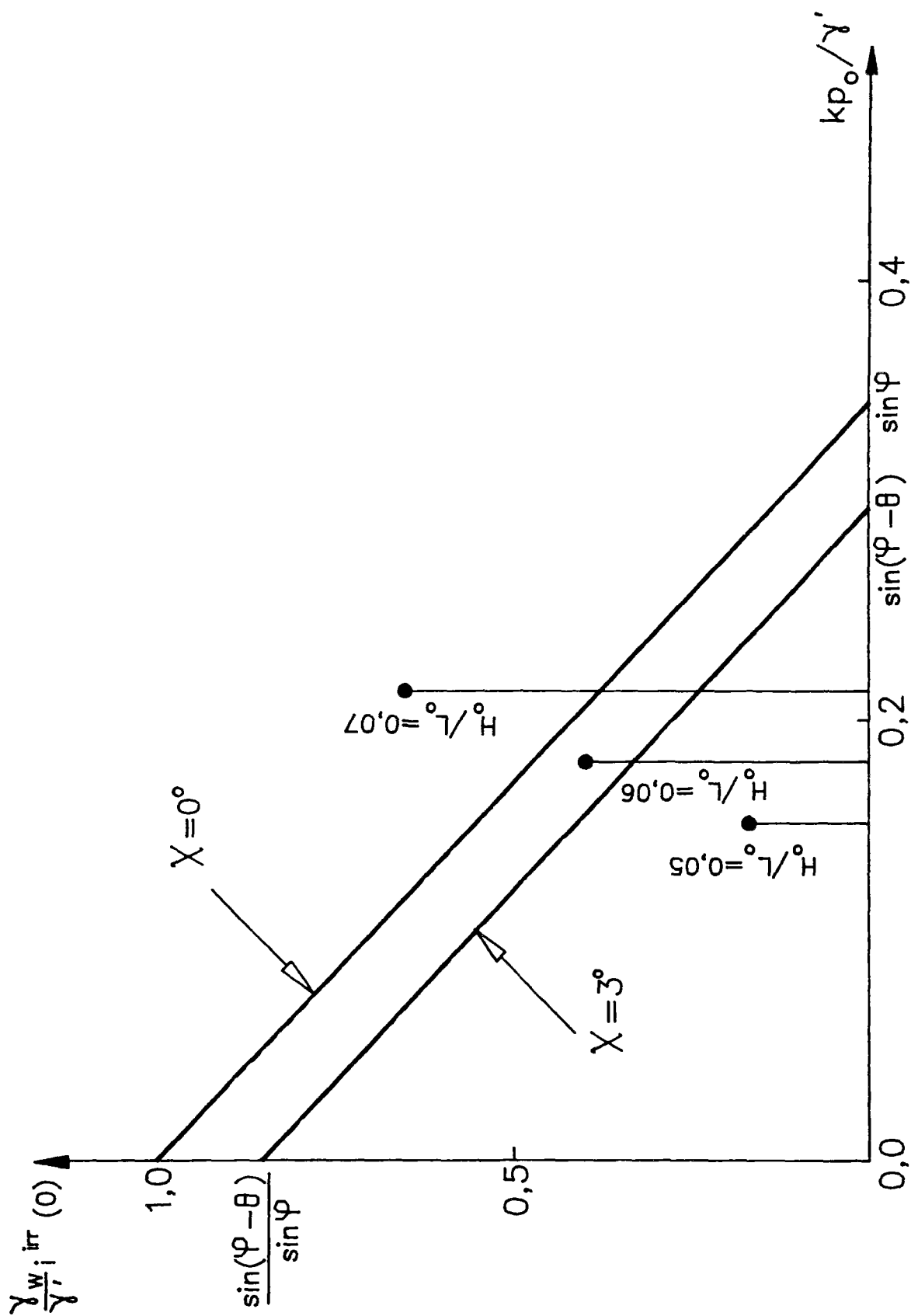


Figure 13. Trajets de chargement dans le plan  $(Q_1, Q_2)$

L'observation qui vient d'être faite doit être confrontée aux analyses de stabilité proposées par Seed, Ishihara et Yamazaki ainsi que Rahman et Jaber. On a vu ces auteurs, préoccupés par le risque de liquéfaction, caractérisent l'apparition de l'instabilité dans le massif par le critère

$$u^a = \gamma' |y| \quad (123)$$

Indépendamment des objections déjà formulées à l'encontre des méthodes qu'ils utilisent pour le calcul de  $u^a$ , le critère (123) est équivalent à

$$i^{irr}(0) = \frac{\gamma'}{\gamma_w} \quad (124)$$

Outre le fait (mineur) que l'inclinaison de la pente soit négligée dans (124), cette définition de l'instabilité apparaît beaucoup moins restrictive que (121), puisque le rôle défavorable de  $Q_1$  n'est pas pris en compte. Or, comme l'avait remarqué Madsen (1978), les valeurs atteintes par  $Q_1$  pour les houles de projet usuelles ne sont pas d'un ordre de grandeur négligeable devant  $\sin \phi$ . La prise en compte des 2 contributions aux forces d'écoulement est donc une nécessité. En d'autres termes, l'approximation (ii) de la méthode de Seed qui consiste à ne considérer que les surpressions interstitielles d'origine irréversible dans la stabilité ne peut être retenue car elle conduit à des conclusions non conservatives.

Dans le cas où la sollicitation est définie par un bloc de vagues de période et cambrure constante, le trajet de chargement dans le plan  $(Q_1, Q_2)$  est un segment vertical dont l'origine est placée sur l'axe  $Q_2=0$ . Si ce segment sort du triangle K, on peut conclure à l'instabilité du massif. Dans le cas contraire, il y a présomption de stabilité.

La figure 13 montre les trajets de chargement correspondant aux 3 situations de la figure 7. Il s'agit donc de 400 vagues dont les cambrures au large sont respectivement  $H_o/L_o = 0,05; 0,06$  et  $0,07$ . Les autres paramètres du calcul de pression interstitielle ont été donnés

au tableau 1. Pour le calcul de stabilité, on a fixé  $\varphi=20^\circ$  et l'on a envisagé le cas du massif horizontal ( $\chi=0^\circ$ ) et le cas où  $\chi=3^\circ$ . Le domaine K est évidemment une fonction décroissante au sens de l'inclusion de l'angle  $\chi$ . Chaque trajet débute sur l'axe  $Q_2=0$  à une abscisse qui croît en fonction de  $H_o/L_o$ . La longueur du trajet n'est autre que la valeur maximale de  $i^{irr}(0)$  sur la durée considérée. Pour les 2 valeurs de  $\chi$ , le massif est potentiellement stable pour  $H_o/L_o=0,05$ , instable pour  $H_o/L_o=0,07$ . En revanche, pour  $H_o/L_o=0,06$ , la stabilité dépend de  $\chi$  : elle est assurée pour le massif horizontal mais non pour  $\chi=3^\circ$ . On retrouve donc sur ce diagramme la sensibilité de la stabilité à la cambrure. Il met également en évidence le rôle défavorable joué par une inclinaison même faible du massif.

En exploitant les évolutions de  $i^{irr}(0)$  données à la figure 8 pour différentes valeurs de  $c_v$ , on constate immédiatement que le risque d'instabilité concerne les "faibles" valeurs de ce paramètre. Les massifs constitués des matériaux les moins perméables ou les plus "élastiquement compressibles" sont donc les plus exposés.

## 8 - CONCLUSION

Ce chapitre a présenté une méthode d'analyse de la stabilité d'un massif sous-marin pulvérulent. Des études antérieures avaient démontré que la perméabilité du matériau ne pouvait être négligée dans un tel problème. Il fallait donc qu'il soit posé en termes de contraintes effectives.

En raison du couplage entre le fluide interstitiel et le squelette, une modélisation du comportement allant au-delà de la donnée du critère de rupture est nécessaire pour caractériser le chargement *en contraintes effectives*. Il s'agit de déterminer les forces d'écoulement agissant sur le squelette solide. A défaut d'une résolution du problème "en déplacements", entreprise beaucoup plus ambitieuse que l'étude de la stabilité, seul un calcul *approché* de ces forces est possible. Il en résulte une approximation du chargement réel. La question de la stabilité du massif soumis à ce chargement approché peut être traitée rigoureusement par le Calcul à la Rupture. Une solution complète au sens de cette théorie a été présentée dans le cas particulier où la houle est modélisée par la théorie linéaire. Elle a permis de mettre en évidence les rôles essentiels joués par la cambrure de la houle, le coefficient de consolidation et la pente éventuelle du massif.

La difficulté du problème de stabilité abordé dans ce chapitre est liée au fait qu'il ne peut être intégré directement dans le cadre du Calcul à la Rupture. On a vu que la résolution requiert davantage d'informations que la donnée du domaine des contraintes admissibles. On retrouvera cette difficulté chaque fois qu'il y a imbrication entre chargement et comportement. Les problèmes dans lesquels les effets inertiels ne sont pas négligeables en fournissent une nouvelle illustration.

## ANNEXE 1

La présente annexe résume la méthode donnée par Rahman et Jaber (1986) pour l'étude de la stabilité d'une pente sous-marine. Elle s'inspire des travaux antérieurs de Seed et Rahman (1978). Elle généralise l'approche de Ishihara et Yamazaki (1984) qui avaient négligé le phénomène de diffusion de la pression générée dans le massif, se plaçant ainsi dans la schématisation d'une perméabilité nulle.

Le problème traité est celui d'un massif semi-infini de surface plane, légèrement inclinée sur la direction horizontale. Il est soumis à une houle définie au large par la cambrure  $H_0/L_0$  et la période  $T$ . Pour le calcul des surpressions exercées par la houle sur le plan  $y=0$ , les auteurs ont recours à la théorie de Stokes d'ordre 1.

### calcul de la surpression interstitielle

#### *calcul de $\underline{\underline{\sigma}}^o$*

La solution  $\underline{\underline{\sigma}}^o$  en contraintes totales du problème étudié lorsque le squelette est élastique linéaire a été étudiée au Chapitre II. Les auteurs utilisent les formules données par Madsen (1978). Ils tiennent compte des variations supposées lentes de la profondeur d'eau  $h$  en actualisant l'amplitude  $p_0(h)$  et le nombre d'onde  $k(h)$  dans l'expression des composantes de  $\underline{\underline{\sigma}}^o$ .

Par ailleurs, la contrainte effective moyenne  $\sigma'_0$  est estimée par  $\gamma' |y|$ . Ceci revient implicitement à négliger l'effet de l'inclinaison de la pente sur la valeur de  $\sigma'_0$  et à supposer que l'état de contraintes initial est sphérique. Ces hypothèses conduisent à l'expression suivante du taux de cisaillement cyclique initial :

$$\rho_0 = \tau / \sigma'_0 = \frac{1}{\gamma'} k(h) p_0(h) \exp(k(h)y) \quad (A1.1)$$

#### *calcul de $\dot{u}_g$*

En application de (56), le terme de source de l'équation de diffusion proposée par les auteurs est constant. L'expression retenue pour  $N_{L,0}$  est celle de Faccioli (1973) qui a été donnée en (23). On a donc

$$\dot{u}_g = \frac{\gamma' |y|}{T} \cdot (\rho_o^\beta / \alpha) \quad (A1.2)$$

La surpression interstitielle est alors identifiée à la solution de (57) s'annulant pour  $y=0$  et  $|y| \rightarrow \infty$ . Pour une pente faible, les auteurs indiquent que les variations de  $u$  selon  $x$  sont négligeables devant les variations selon  $y$ . La solution de (57) est donc recherchée dans l'approximation unidimensionnelle.

#### calcul de stabilité

Les auteurs introduisent le rapport  $r_p = u / \gamma' |y|$ . Conformément au critère de stabilité décrit en 4.b, la frontière du domaine instable, si ce dernier existe, est définie par le lieu des points d'équation

$$r_p = 1 \quad (A1.3)$$

On observera que la valeur de l'angle  $\theta$  de la pente n'intervient pas dans le critère (A1.3) ni d'ailleurs dans le calcul du profil de la pression interstitielle par (57) sous une profondeur d'eau donnée. En conséquence, la profondeur de la zone instable pour une profondeur d'eau donnée ne prend pas en compte l'effet de  $\theta$ .

## ANNEXE 2

Le paragraphe 6.a.5 a montré que  $\langle u^a \rangle$  est solution d'une équation de diffusion avec une source de pression dépendant de  $\langle \underline{\underline{\varepsilon}}^{irr} \rangle$  dans le cas particulier où ce tenseur est uniaxial du type (74). On se propose de montrer que ce résultat est conservé dans le cas plus général de (73). Observant que le problème défini par les équations (72a) à (72f) avec des conditions initiales nulles est linéaire par rapport au chargement défini par  $\langle \underline{\underline{\varepsilon}}^{irr} \rangle$ , on examine successivement les cas  $a=c=0$  et  $b=c=0$ , celui où  $a=b=0$  ayant été traité en 6.a.5.

**cas  $a=c=0$**

On recherche une solution des équations (72a-f), nulle pour  $t \leq 0$ , dans le cas où

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}}^{irr} \rangle = \frac{b(y,t)}{2} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) \quad (A2.1)$$

Pour simplifier, on note  $\underline{\underline{\sigma}}'$ ,  $u$  et  $\underline{\underline{\xi}}$  les champs de contraintes, de pression, de déformations et de déplacements de la solution recherchée en omettant les notations  $\langle \rangle$  et "a".

Il est immédiat de vérifier que le champ défini par  $\langle \underline{\underline{\varepsilon}}^{irr} \rangle$  est compatible géométriquement. Il doit donc en être de même de la partie réversible de  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ . On recherche comme en 6.a.5 une solution  $\underline{\underline{\sigma}}'$  de la forme

$$\underline{\underline{\sigma}}' = u(y,t) \left\{ \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \frac{\nu}{1-\nu} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \right\} \quad (A2.2)$$

qui vérifie manifestement (72a). Le tenseur  $\underline{\underline{\varepsilon}}^o$  des déformations réversibles est alors uniaxial et vaut

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^o = \frac{u(y,t)}{K_v} \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y \quad (A2.3)$$

où  $K_v$  a été défini en (80). Il est manifestement compatible géométriquement. En utilisant (A2.1) et (A2.3) dans (72b), on obtient l'équation différentielle à vérifier par  $u(y,t)$  :



$$c_v u_{,yy} = u_{,t} \quad (A2.4)$$

dont la solution pour des conditions initiales nulles n'est autre que 0. Posant alors

$$\xi_x = \int_a^y b(\alpha, t) d\alpha \quad (A2.5)$$

on vérifie aisément que le triplet ( $\sigma' = 0; u = 0; \xi = \xi_x \underline{e}_x$ ) est bien solution du problème posé. Il apparaît donc qu'un tenseur du type (A2.1) ne contribue pas à la surpression interstitielle d'origine anélastique.

**cas  $b=c=0$**

On considère maintenant le cas particulier où le champ  $\langle \varepsilon^{irr} \rangle$  est de la forme

$$\langle \varepsilon^{irr} \rangle = a(y, t) \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \quad (A2.6)$$

On recherche à nouveau une solution ( $\sigma', u, \xi$ ) qui soit indépendante de  $x$  et  $z$ . On a donc, par (72a) et (72d)

$$\sigma'_{yy} = u \quad (A2.7)$$

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} \quad (A2.8)$$

soit, en utilisant (72c):

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}^e + a = 0 \\ \varepsilon_{zz}^e = 0 \end{cases} \quad (A2.9)$$

c'est-à-dire

$$aE + \sigma'_{xx} - \nu(\sigma'_{yy} + \sigma'_{zz}) = 0 \quad (A2.10)$$

$$\sigma'_{zz} - \nu(\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy}) = 0$$

La résolution de ce système fournit

$$\sigma'_{xx} = \frac{\nu}{1-\nu} u - aE/(1-\nu^2) \quad (A2.11)$$

$$\sigma'_{zz} = \frac{\nu}{1-\nu} u - \nu aE/(1-\nu^2)$$

La valeur de  $\varepsilon_{yy}$  résulte alors de (72c) :

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy}^e = \frac{u}{K_v} + a \frac{\nu}{1-\nu} \quad (A2.12)$$

Le champ  $\varepsilon$  est donc uniaxial. Il est manifestement compatible géométriquement et l'existence d'un champ  $\xi$  vérifiant (72d) et (72f) est assurée. En introduisant (A2.8) et (A2.12) dans (72b), on obtient l'équation de champ à vérifier par  $u$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \partial^2 / \partial y^2 (u) - \frac{\nu}{1-\nu} K_v \left( \frac{\partial a}{\partial t} \right) \quad (\text{A2.13})$$

#### conclusion

Dans le cas général où le champ de déformations irréversibles est donné par (73), la surpression interstitielle  $\langle u^a \rangle$  est solution d'une équation de diffusion avec sources : en associant (81a) et (A2.13), il vient en effet

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \partial^2 / \partial y^2 (u) - K_v \left( \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial t} \right) \quad (\text{A2.14})$$

En raison du coefficient  $\frac{\nu}{1-\nu}$  de  $\frac{\partial a}{\partial t}$ , il apparaît que la formule (81b) ne peut être reprise telle quelle. Son emploi nécessite une justification qui sera donnée à l'Annexe 3.

### ANNEXE 3

#### justification de (87)

D'une manière cohérente avec le choix de la simulation et les informations expérimentales permettant de quantifier les déformations irréversibles, on a vu que les éventuelles variations de  $\Delta \epsilon_v^{irr}$  à l'intérieur d'une longueur d'onde devaient être négligées. Dans ces conditions, l'écart entre l'état de densification de 2 points situés à la même ordonnée  $y$  est au plus égal à la densification cumulée sur un cycle. Dans l'hypothèse du cycle élémentaire peu intense, il est donc possible de négliger les variations de  $\epsilon$  sur une droite d'équation  $y=Cte$ .

Sur une période  $[nT, nT+T[$ , les variations de  $\langle u^a \rangle$  étant elles-mêmes petites devant celles de  $\underline{\sigma}'^e$ , le champ  $\underline{\sigma}'^s$  ne dépend de ses arguments  $x$  et  $t$  que par l'intermédiaire du facteur  $x - \frac{L}{T}t$ . A l'échelle de la période,  $\underline{\sigma}'^s$  est donc une onde se déplaçant en phase avec l'onde des surpressions de la houle  $p_h(x, t)$ . Il résulte de la formule (32) que cette propriété est également vraie pour le taux de déformations volumiques irréversibles  $\frac{\partial}{\partial t} \epsilon_v^{irr}$ . On a donc

$$(\forall a \in [0, L]) \quad \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_v^{irr}(x+a, y, t) = \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_v^{irr}(x, y, t - \frac{T}{L}a) \quad (A3.1)$$

Cette observation permet le calcul de  $\frac{\partial}{\partial t} \langle \epsilon_v^{irr} \rangle$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \epsilon_v^{irr} \rangle = \frac{1}{L} \int_x^{x+L} \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_v^{irr}(s, t) ds = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_v^{irr}(x, t - \frac{T}{L}a) da \quad (A3.2)$$

En utilisant le changement de variable  $\tau = a - \frac{T}{L}t$ , il vient

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \epsilon_v^{irr} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial}{\partial \tau} \epsilon_v^{irr}(x, t - \tau) d\tau = \frac{1}{T} (\epsilon_v^{irr}(x, t) - \epsilon_v^{irr}(x, t - T)) \quad (A3.3)$$

Ainsi, la source de pression de l'équation (81b) apparaît comme le taux d'accroissement de la déformation volumique  $\epsilon_v^{irr}$  calculé sur une période, c'est-à-dire  $\frac{1}{T} \Delta \epsilon_v^{irr}$ . Ce résultat fournit donc une

justification de (87).

justification de l'emploi de (81b)

Dans le cas général où le champ de déformations irréversibles est défini par (73), l'Annexe 2 a montré que l'équation (81b) doit en toute rigueur être remplacée par

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle u^a \rangle = c_v \partial^2 / \partial y^2 \langle u^a \rangle - K_v \left( \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial t} \right) \quad (A3.4)$$

où  $a = \langle \varepsilon_{xx} \rangle$  et  $c = \langle \varepsilon_{yy} \rangle$ . En vertu de ce qui précède, on a de plus

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{1}{T} \Delta \varepsilon_{xx}^{irr} ; \quad \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{T} \Delta \varepsilon_{yy}^{irr} \quad (A3.5)$$

où  $\Delta \varepsilon_{xx}$  et  $\Delta \varepsilon_{yy}$  représentent les variations de  $\varepsilon_{xx}$  et  $\varepsilon_{yy}$  sur une période. On a donc

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle u^a \rangle = c_v \partial^2 / \partial y^2 \langle u^a \rangle - K_v \left( \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \Delta \varepsilon_{xx}^{irr} + \Delta \varepsilon_{yy}^{irr} \right) \quad (A3.6)$$

Cependant, dans la pratique, les informations expérimentales portent non pas sur  $\Delta \varepsilon_{xx}^{irr}$  et  $\Delta \varepsilon_{yy}^{irr}$ , mais sur le taux d'accroissement sur une période de la déformation volumique irréversible, qui n'est autre que  $\Delta \varepsilon_{xx}^{irr} + \Delta \varepsilon_{yy}^{irr}$ . On est donc amené à comparer l'estimation de  $u$  fournie par (A3.6) et celle qui correspond à la formulation en moyenne de (81b), c'est-à-dire

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \partial^2 / \partial y^2 (u) - K_v (\Delta \varepsilon_{xx} + \Delta \varepsilon_{yy}) \quad (A3.7)$$

Vis-à-vis du chargement "tournant" de la houle, pour lequel aucune direction du plan  $(e_x, e_y)$  n'est privilégiée, il est raisonnable d'admettre que les quantités  $\Delta \varepsilon_{xx}$  et  $\Delta \varepsilon_{yy}$  sont du même signe. Pour le matériau contractant, il s'agit du signe négatif, puisque  $\Delta \varepsilon_{xx}^{irr} + \Delta \varepsilon_{yy}^{irr} = \Delta \varepsilon_v^{irr}$ . Dans ces conditions, la source de pressions de (A3.7) est supérieure à celle de (A3.6). Il en est alors de même de l'estimation de  $u$  par (A3.7) par rapport à celle fournie par (A3.6). En adoptant (A3.7), on se place donc du côté de la sécurité vis-à-vis

d'un calcul de stabilité ultérieur. C'est cette équation, bien adaptée aux informations expérimentales disponibles, qui a été retenue dans ce travail.

#### ANNEXE 4

##### 1. recherche du maximum de $i_{\alpha l}$ pour $l > 0$

On considère une fonction numérique  $i(.)$  définie sur  $\mathbb{R}^-$ , de classe  $C^1$ , et possédant en outre les propriétés suivantes :

$$(\exists y^* \in \mathbb{R}^-) \text{ tel que } (\forall y < y^*) i(y) \leq 0 \\ (\forall y > y^*) i(y) \geq 0 ; \frac{di}{dy}(y) \geq 0$$

On se propose de montrer que le maximum de la quantité  $i_{\alpha l}$  définie comme en (102) est, à  $\alpha$  fixé, atteint pour  $l \rightarrow 0$ . Tout d'abord, il est facile de voir que

$$i_{\alpha l} = \frac{2}{(x_B - x_A)^2 \operatorname{tg}(\theta - \alpha)} \int_{x_A}^{x_B} dx \int_{(x_A - x) \operatorname{tg}(\theta - \alpha)}^0 i(s) ds \quad (A4.1)$$

En utilisant le changement de variable  $y = (x_A - x) \operatorname{tg}(\theta - \alpha)$  et la notation  $Y = (x_A - x_B) \operatorname{tg}(\theta - \alpha)$ , il vient encore

$$\frac{1}{2} i_{\alpha l} = \frac{1}{Y^2} \int_Y^0 dy \int_y^0 i(s) ds \quad (A4.2)$$

Puisque  $l = (x_B - x_A)$ , le travail consiste à établir que l'intégrale double de (A4.2), qui sera notée  $F(Y)$  est maximale lorsque  $Y \rightarrow 0$ . On commence par montrer que  $F$  est une fonction croissante sur  $[y^*, 0]$ . On obtient

$$F'(Y) = -\frac{1}{Y^2} \left\{ \int_Y^0 i(y) dy + \frac{2}{Y} \int_Y^0 dy \int_y^0 i(s) ds \right\} \quad (A4.3)$$

Puis, en intégrant par parties, il vient encore

$$F'(Y) = \frac{1}{Y^2} \left\{ \int_Y^0 i(y) dy - \frac{2}{Y} \int_Y^0 y i(y) dy \right\} \quad (A4.4)$$

On pose alors

$$G(Y) = \int_Y^0 i(y) dy - \frac{2}{Y} \int_Y^0 y i(y) dy \quad (A4.5)$$

On va montrer que  $G(.)$  est une fonction positive sur  $[y^*, 0]$ . Il en résultera que  $F(.)$  est croissante sur cet intervalle. On vérifie que

$$G'(Y) = \frac{2}{Y^2} \int_Y^0 y i(y) dy + i(Y) = \frac{2}{Y^2} \int_Y^0 y \{i(y) - i(Y)\} dy \quad (A4.6)$$

Pour  $Y \geq y^*$ , la quantité  $i(y) - i(Y)$  est positive sur  $[Y, 0]$ . La fonction  $G(\cdot)$  est donc décroissante sur  $[y^*, 0]$ . Comme  $G(0) = 0$ , elle est positive sur cet intervalle. Cela implique en particulier que  $F'(y^*) \geq 0$  et l'on a

$$\sup_{Y \geq y^*} F(Y) = \lim_{Y \rightarrow 0} F(Y) = i(0) \quad (A4.7)$$

En exploitant maintenant le fait que  $i$  est une fonction négative sur  $]-\infty, y^*]$ , on obtient sans difficulté la majoration suivante :

$$(\forall Y \leq y^*) F(Y) \leq \frac{1}{Y^2} \int_Y^{y^*} dy \int_{y^*}^0 i(s) ds + \frac{1}{Y^2} \int_{y^*}^0 dy \int_y^0 i(s) ds = H(Y) \quad (A4.8)$$

On se propose de comparer la fonction  $H(Y)$  définie par (A4.8) et  $F(y^*)$ . On introduit donc la quantité  $I(Y) = (H(Y) - F(y^*)) Y^2$

$$I(Y) = \int_Y^{y^*} dy \int_{y^*}^0 i(s) ds + (1 - (Y/y^*)^2) \int_{y^*}^0 dy \int_y^0 i(s) ds \quad (A4.9)$$

Il est facile de voir que

$$I'(Y) = - \int_{y^*}^0 i(s) ds - \left[ 2/Y^* \int_{y^*}^0 dy \int_y^0 i(s) ds \right] \cdot (Y/y^*) \quad (A4.10)$$

En remarquant que  $|Y| \geq |y^*|$ , on obtient alors

$$I'(Y) \geq - \int_{y^*}^0 i(s) ds - (2/y^*) \int_{y^*}^0 dy \int_y^0 i(s) ds = (y^*)^2 F'(y^*) \geq 0 \quad (A4.11)$$

La fonction  $I(\cdot)$  est donc croissante sur  $]-\infty, y^*]$ . Comme de plus  $I(y^*) = 0$ , cette fonction est donc négative sur l'intervalle considéré.

Il en résulte que

$$(\forall Y \leq y^*) F(Y) \leq H(Y) \leq F(y^*) \quad (A4.12)$$

En associant (A4.7) et (A4.12), on obtient le résultat annoncé :

$$\sup_{Y \leq 0} F(Y) = F(0) = i(0) \quad (A4.13)$$

## 2. recherche du maximum de $\frac{1}{y} \int_0^y i(s) ds$

On considère une fonction numérique  $i(.)$  définie sur  $\mathbb{R}^-$  possédant les propriétés énoncées au paragraphe ci-dessus. On pose

$$J(y) = \frac{1}{y} \int_0^y i(s) ds \quad (A4.14)$$

On se propose de montrer que le maximum de  $J(y)$  est atteint lorsque  $y \rightarrow 0$ . La démarche est analogue à celle du paragraphe 1 : on étudie successivement  $J(.)$  dans  $[y^*, 0]$  et  $]-\infty, y^*]$ .

étude dans  $[y^*, 0]$

Il est immédiat de vérifier que

$$J'(y) = (1/y^2) \left\{ y i(y) - \int_0^y i(s) ds \right\} \quad (A4.15)$$

soit encore

$$J'(y) = (1/y^2) \left\{ \int_y^0 (i(s) - i(y)) ds \right\} \quad (A4.16)$$

Pour  $y \geq y^*$ , l'intégrande de (A4.16) est positif. La fonction  $J(.)$  est donc croissante sur  $[y^*, 0]$  :

$$(\forall y \geq y^*) J(y) \leq J(0) = i(0) \quad (A4.17)$$

étude dans  $]-\infty, y^*]$

La majoration suivante résulte du fait que  $i(.)$  est une fonction négative sur  $]-\infty, y^*]$  :

$$(\forall y \leq y^*) J(y) = -\frac{1}{y} \int_y^0 i(s) ds \leq -\frac{1}{y} \int_y^0 i(s) ds \leq -(1/y^*) \int_y^0 i(s) ds = J(y^*) \quad (A4.18)$$

Enfin, en associant (A4.17) et (A4.18) :

$$\sup_{y \leq 0} \frac{1}{y} \int_0^y i(s) ds = i(0) \quad (A4.19)$$





## CONCLUSION GENERALE

Cette étude est arrivée à son terme. Il convient à présent de faire le point sur les acquis et de mesurer le chemin qui reste à parcourir.

La partie de ce travail développée dans le cadre de la théorie de l'élasticité a permis de se familiariser avec le chargement et ses effets sur le massif sollicité. L'usage qu'on a pu faire des résultats issus de la modélisation élastique dans l'étude de la stabilité confère aussi à ce chapitre un rôle utilitaire. Mais au-delà de la construction d'outils "pour la suite", il était également l'occasion de s'interroger sur les questions d'unicité de solutions en élasticité dans les domaines géométriques non bornés.

La question de la stabilité a été examinée aux chapitres III et IV respectivement pour un sol cohérent et pour un sol frottant. Chaque fois, le recours au Calcul à la Rupture a conduit à des résultats concrets, utilisables par l'ingénieur.

Cependant, lorsque l'on compare les développements consacrés à chacune de ces deux familles de sols, une différence fondamentale apparaît au plan de la définition du chargement. Dans le cas d'un sol cohérent, celui-ci est déterminé complètement par la donnée des caractéristiques physiques de la houle de projet et le choix d'un modèle de houle. En revanche, pour un sable, l'introduction d'informations supplémentaires portant sur la contractance du matériau est indispensable pour passer des paramètres de la houle à la définition des forces extérieures agissant sur le massif. A une même houle du projet, correspond alors un chargement constant pour un sol cohérent, et un trajet de chargement pour un sol frottant.

Cette différence trouve évidemment son origine dans les choix de deux critères de rupture distincts selon la nature du sol.

Il en résulte des niveaux de complexité eux-mêmes différents dans le traitement de la question de la stabilité. En raison de la phase préliminaire consacrée à la définition du chargement, l'étude du cas "granulaire" peut paraître sensiblement plus délicate. Mais la simplicité relative du cas "cohérent" est trompeuse. Elle masque la complexité de la détermination du paramètre "cohésion non drainée" qui concentre sur lui-même toute l'information disponible sur le matériau. En plus des difficultés expérimentales classiques rencontrées pour mener à bien cette tâche s'ajoute dans le cas présent la nature cyclique du chargement de la houle. Lorsque cela est possible, il est clair que le choix de la cohésion doit s'appuyer sur un programme expérimental qui prenne en compte cet aspect (voir par exemple Meimon et Hicher, 1980).

L'ensemble de ce travail a été développé dans le cadre de modélisations déterministes pour le champ des surpressions qui s'exerce sur le fond sous-marin. Etant donnée l'importance du choix d'une théorie mathématique de la houle sur les résultats de l'analyse de la stabilité, il est naturel de s'interroger sur la pertinence d'une simulation de la houle réelle par un modèle régulier. Pour l'avenir, cette réflexion pourra s'appuyer sur les développements du Calcul à la Rupture probabiliste et la connaissance disponible sur la houle aléatoire.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Aristaghes P. et C. (1985). *Théorie de la houle; houle réelle; propagation de la houle*. Rapport du SCTPMVN.

Bishop, A.W. (1966). *The strength of soils as engineering materials*. Géotechnique 16, n°2, 89-130.

Bonnefille, R. (1980). *Cours d'hydraulique maritime*. Paris : Masson.

Coussy, O. (1978). *Le Calcul à la Rupture dans la tenue des ouvrages en terre*. Thèse de docteur-ingénieur, Paris VI.

Coussy, O. (1989). *A general theory of thermoporoelastoplasticity for saturated porous materials*. Transport in Porous Media 4 pp281-293.

Dormieux, L. (1988). *Stability of a purely cohesive sea bed soil under wave loading*. Géotechnique 38, n°1, 121-123.

Dormieux, L. & Delage (1988). *Effective stress response of a plane sea-bed under wave loading*. Géotechnique 38, n°3, 445-450.

Faccioli, E. (1973). *A stochastic model for predicting seismic failure*. Earthquake Eng. Struc. Dyn., Vol n°1, pp 293-307.

Finn, W.D.L.; Lee, K.W.; Martin, G.R. (1977). *An effective stress model for liquefaction*. Journal of the Geotech. Eng. Div., ASCE, GT6.

Fung, C. (1965). *Foundations of solid mechanics*, Englewood Cliff : Prentice-Hall, 195-197.

Gatmiri, B. (1989). Thèse à paraître.

Henkel, D.J. (1970). *The role of waves in causing submarine landslides*. Géotechnique 20, n°1.

Ishihara, K.; Yamazaki, A. (1984). *Analysis of wave-induced liquefaction in seabed deposits of sand*. Soils and Foundations, Vol. n°3.

Ishihara, K. (1985). *Stability of natural deposits during earthquake*. Proc. 11th Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundations Eng., San Francisco, Vol n°1, pp 321-376.

Lambe, T.W.; Whitman, R.V., (1979). *Soil Mechanics*. Wiley & Sons.

Loret (1983). Thèse de docteur-ingénieur.

Luong, M.P. (1980). *Phénomènes cycliques dans les sols pulvérulents*. Revue Française de Géotechnique, n°10.

Madsen, O.S. (1978). *Wave-induced pore pressures and effective stresses in a porous bed*. Géotechnique n°28.

Matar, M. (1978). *Capacité portante des fondations superficielles*. Thèse de Docteur-Ingénieur.

Martin, G.R.; Finn, W.D.L; Seed, H.B (1975). *Fundamentals of liquefaction under cyclic loading*. Journal of the Geotech. Eng. Div., ASCE, GT5.

Meimon, Y. et Hicher, P.Y. (1980). *Mechanical behaviour of clays under cyclic loading*. Int. Symp. on Soils under Cyclic and Transient Loading. Swansea.

Pagès, G. (1988). *Théorie de la houle aléatoire*. Rapport interne du CERMA, ENPC.

Pecker, A. (1984). *Dynamique des Sols*. Presses de l'ENPC.

Rahman, M.S.; Jaber, C.L. (1986). *A simplified drained analysis for wave-induced liquefaction in ocean floor sands*. Soils and Foundations,

Vol. 26, n°3.

Raviart, et Thomas (1983). *Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles*. Masson.

Salençon, J. (1974). *Bearing capacity of a footing on a  $\phi=0$  soil with linearly varying shear strength*. Géotechnique 24, n°3, 443-446.

Salençon, J. (1983). *Calcul à la rupture et analyse limite*. Cours de calcul des structures anélastiques. Paris : Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

Salençon, J. et Matar, M. (1982). *Capacités portantes des fondations superficielles circulaires*. JMTA, vol. 1, n°2.

Salençon, J. et Tristan-Lopez, M.A. (1981). *Stabilité d'ouvrages en sols cohérents anisotropes*. 10th ICSMFE, Stockholm, pp 515-518.

Schofield, A.N.; Wroth, C.P. (1968). *Critical State Soil Mechanics*. McGraw-Hill, New-York.

Schlosser, F.; Corte, J.F.; Dormieux, L. (1987). *Effets dynamiques de l'eau dans les sols*. 9<sup>ème</sup> Congrès Européen de Mécanique des Sols et des Travaux de Fondations.

Seed, H.B.; Rahman M.S. (1978). *Wave-induced pore pressure in relation to ocean floor stability of cohesion less soils*. Marine Geotechnology, Vol. 3, n°2.

Seed, H.B.; Martin, P.P.; Lysmer, J. (1976). *Pore water pressure changes during soil liquefaction*. Journal of the Geotech. Eng. Div., ASCE, GT4.

Smits, F.P.; Andersen, K.H.; Gudehus, G. (1979). *Pore pressure generation*. NGI, Publication n°125.

Tristan-Lopez, M.A. (1981). *Stabilité d'ouvrages en sols cohérents anisotropes*. Thèse, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.